Informatica con Elementi di Matematica e Statistica(6 CFU)

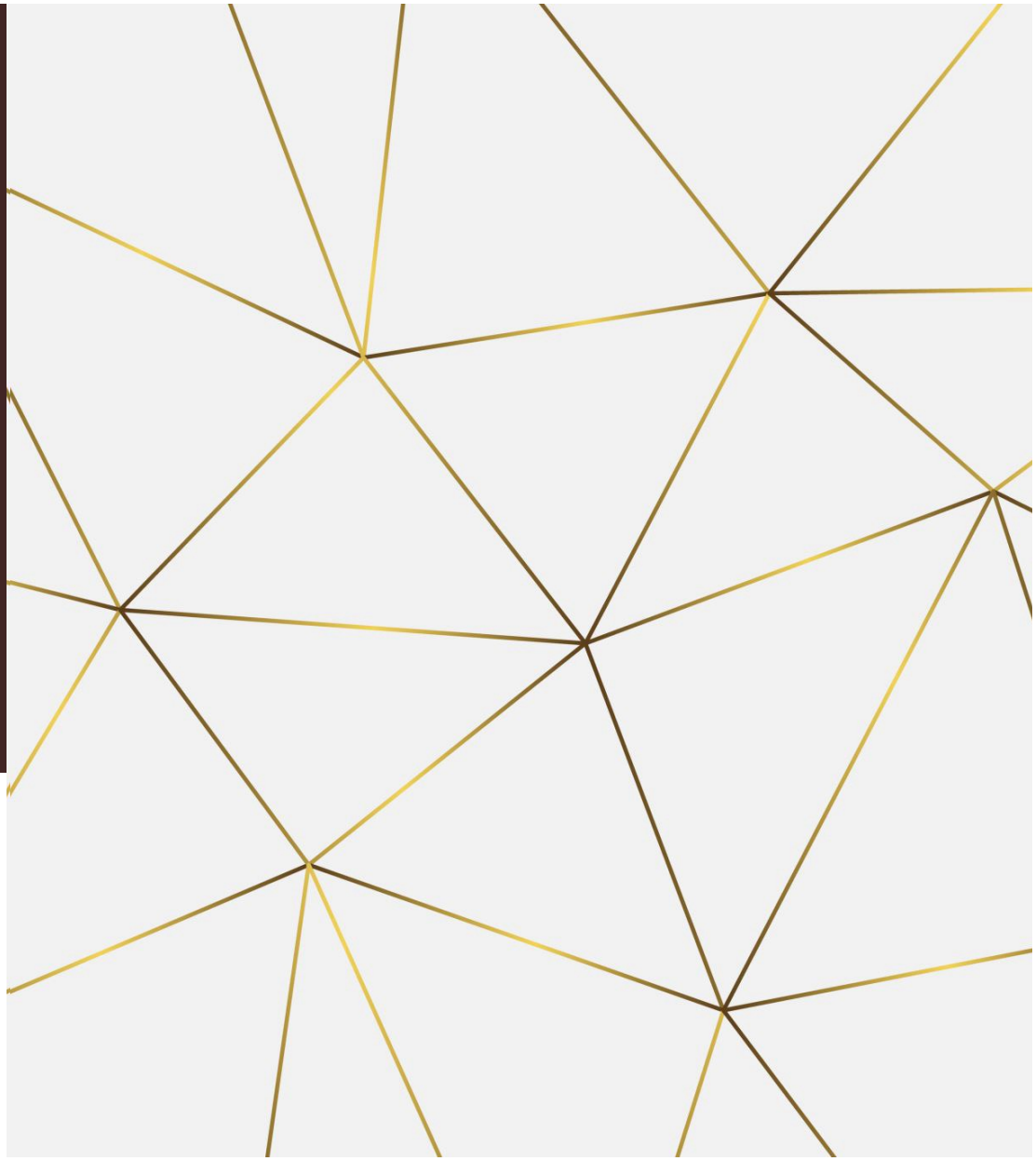
CdLM in Farmacia (A-L)

Dipartimento di Scienze del Farmaco e della Salute

PROF. FRANCESCO PAPPALARDO
Dipartimento di Scienze del Farmaco e della Salute
Università degli Studi di Catania
francesco.pappalardo@unict.it

COMBINE Group
In Silico BioMedicine

UNIVERSITÀ degli STUDI di CATANIA



Informazioni generali

Orario delle lezioni:

- Come da calendario didattico, salvo cambiamenti eccezionali che saranno tempestivamente comunicati tramite sito DSFS e canale TELEGRAM

Ricevimento: lunedì 12-14 o VENERDI' 16-17 (Palazzo dell'Etna, Via S. Nullo, 5/I – stanza 27, 1° piano), previo appuntamento

Testi consigliati: slides fornite a lezione e sito web docente

Sito: https://www.combine-group.org

Modalità d'esame

Prova scritta:

- Matematica+statistica
- Informatica

Modalità di valutazione

Sia per le prove in itinere che per gli appelli regolari, ad ogni quesito del compito verrà attribuito il seguente punteggio:

- Risposta corretta: 2 punti
- Risposta errata: -1 punto
- Risposta non data: 0 punti

Modalità di valutazione

Si ricorda, inoltre, che ai fini del superamento della prova di informatica, **è necessario svolgere correttamente almeno uno degli esercizi di calcolo assegnati.**

Programma Matematica

Matematica

- Equazioni e disequazioni di primo grado; equazioni di secondo grado.
- Diretta ed inversa proporzionalità.
- Proporzioni e percentuali.
- Uso della calcolatrice scientifica.
- Funzioni elementari: funzioni potenza e radici n-esime, funzioni esponenziali e funzioni logaritmo: definizioni, proprietà, grafici, applicazioni.
- Uso di esponenziali e logaritmi nelle scienze della vita: modelli per l'evoluzione di una popolazione, come quella dei batteri di una coltura o delle cellule di un tessuto di un organismo.
- Funzioni di una variabile reale: cenni su dominio di definizione, crescenza, decrescenza, massimo e minimo (assoluti), composizione di funzioni elementari e loro grafico.
- Limiti: definizioni, proprietà, regole di calcolo, ordine di infinito e di infinitesimo, aspetti grafici, asintoti obliqui.
- Derivate.
- Integrali: definizione, proprietà, calcolo di aree, approssimazione col metodo dei trapezi. Utilizzo degli strumenti di IA per la matematica.

Programma Statistica

Statistica

- Cenni e principi di statistica descrittiva.
- Misure di frequenza.
- Biostatistica.
- Distribuzioni (Normale, Gaussiana).
- Misure del rischio.

Programma Informatica

Informatica

- Concetti fondamentali della Teoria dell'informazione; Codice binario e cambiamenti di base. Codifiche audio e video.
- Hardware: Componenti principali di un PC; Prestazioni di un computer; Unità centrale dielaborazione; Memoria; Periferiche di Input/output.
- Software: Tipi di software; Software di sistema; Software applicativo; Graphical User Interface;
- Introduzione sulle reti di calcolatori e INTERNET.
- Applicazioni
- Digital Health e in silico medicine

Wolfram Alpha

- Wolfram Alpha è noto per la sua capacità di eseguire calcoli matematici complessi e risolvere equazioni.
- Può gestire algebra, calcolo, statistica e molti altri argomenti matematici.
- È utilizzato da studenti, scienziati, ingegneri e professionisti per risolvere problemi matematici e scientifici.

https://www.wolframalpha.com



Equazioni, Disequazioni e Proporzioni

Definizione di Equazione

Un'equazione è un'uguaglianza tra due espressioni algebriche, con una o più incognite (es. x,y,z,). Risolvere un'equazione significa trovare il valore (o i valori) dell'incognita, che rendono uguali i due membri.

L' insieme di esistenza, è l'insieme dei valori per cui l'equazione ha senso, mentre l'insieme soluzione, è l'insieme dei valori che soddisfano l'equazione.

Esempio: $5x + 3 = 2x + 4$

Bisogna trovare il valore di x che rende vera l'uguaglianza.

$$5x - 2x + 3 = 4$$

$$3x + 3 = 4$$

$$3x = 1$$

$$x = 1/3$$

I principio di Equivalenza

Data un'equazione, possiamo aggiungere o sottrarre la stessa quantità a entrambi i membri, senza modificare l'insieme di esistenza, così da ottenere un' equazione equivalente alla precedente.

Esempio:

$$x + 5 = 3$$

Sottraendo 5 da entrambi i membri :

$$x + 5 - 5 = 3 - 5$$
$$x = -2$$

Quindi:

$$S = \{-2\}$$
$$-2 = -2$$

Il principio di Equivalenza

Data un'equazione, possiamo moltiplicare o dividere entrambi i membri di un'equazione per la stessa quantità diversa da zero, senza modificare le soluzioni. L'equazione ottenuta è equivalente alla precedente.

Esempio:

$$\frac{x}{2} = 3$$

Moltiplicando entrambi i membri per 2 :

$$2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 3$$
$$x = 6$$

Equazioni di I grado

Un'equazione di primo grado (o lineare) è un'equazione in cui l'incognita compare solo con esponente 1.

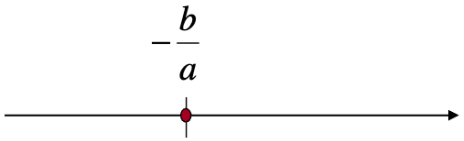
$$ax + b = 0 \ (a \neq 0)$$

Per risolverla:

- spostare b al secondo membro cambiando il segno;
- Dividere entrambi i membri per a.

Si ottiene la soluzione: $x = -\frac{b}{a}$.

Tale soluzione corrisponde a un solo punto sulla retta reale.



Equazioni di I grado

Esempio. Risolvere l'equazione:

$$(x\ +1)^2 - x + 2 = x^2$$

- Sviluppare il quadrato di binomio al I membro:

$$x^2 + 2x + 1 - x + 2 = \ x^2$$

- Ridurre i termini simili:

$$x^2 + (2x - x) + (1 + 2) = \ x^2\ x^2 + x + 3 = \ x^2$$

- Eliminare x^2 da entrambi i membri:

$$x + 3 = \ 0$$

- Risultato:

$$x = -3$$

Equazioni di II grado

Un'equazione di II grado (o quadratica) è un'equazione algebrica in cui l'incognita compare con esponente massimo 2.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ \ (a \neq 0, a, b, c \in R)$$

Per risolvere queste equazioni si utilizza la formula risolutiva, che dipende dal discriminante Δ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac$$

Casi possibili:

Se Δ > 0 l'equazione ammette 2 soluzioni reali distinte

Se Δ = 0 l'equazione ammette 2 soluzioni reali coincidenti

Se Δ < 0 l'equazione non ammette soluzioni reali

Equazioni di II grado

Esempio. Risolvere l'equazione:

$$2x^2 - 5x + 3 = 0$$

- Calcolare il valore discriminante:

$$\Delta = (-5^2) - 4(2)(3) = 1 > 0$$

Quindi, l'equazione ammette due soluzioni reali distinte. Ora bisogna determinarle

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(2)} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Le disequazioni

Una disequazione è una relazione di disuguaglianza tra due espressioni contenenti incognite. Risolverla significa trovare l'insieme di valori che rendono vera la disuguaglianze. Le soluzioni sono generalmente intervalli di numeri reali.

Principi di equivalenza:

L'insieme delle soluzioni non cambia se:

- si aggiunge o sottrae la stessa quantità a entrambi i membri;
- si moltiplica o divide entrambi i membri per una stessa quantità, invertendo il verso della diseguaglianza se la quantità è negativa.

Esempio:

$$-3x + 5 \leq 2$$
$$-3x + 5 - 5 \leq 2 - 5$$
$$-3x \leq -3$$
$$\mathrm{x} \geq 1$$

Le disequazioni di I grado

Una disequazione di primo grado (o lineare) è un'espressione che, dopo eventuali semplificazioni, può essere scritta nella forma:

$$ax + b \geq 0 \ (a \neq 0 \ , a, b \in R)$$

Poiché moltiplicando per -1 una disequazione si inverte il verso, le due disequazioni sono equivalenti:

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow -ax - b < 0$$

Per comodità, si può sempre supporre $b > 0 \Leftrightarrow -ax - b < 0$

Per comodità, si può sempre supporre a > 0

Se $ax + b > 0 \implies ax > -b \implies x > -\frac{b}{a}$

$Se\ ax - b < 0 \implies ax < -b \implies x < -\frac{b}{a}$

Le disequazioni di I grado

Esempio. Risolvere la disequazione:

$$-3x \leq -5$$

Poiché il coefficiente di x è negativo, si può moltiplicare entrambi i membri per -1, ricordando di invertire il verso della disequazione:

$$3x \geq 5$$

Ora dividiamo entrambi i membri per 3 > 0, ottenendo:

$$x \geq \frac{5}{3}$$



Le disequazioni di II grado

Una disequazione di secondo grado (o quadratica) è una disequazione algebrica in una sola incognita x, il cui grado massimo è 2.

$$ax^2 + bx + c > 0 \ (a \neq 0 , a, b, c \in R)$$

Passaggi di risoluzione:

- Verificare il segno di a. Se $a < 0$, moltiplicare entrambi i membri per -1 e invertire il verso della disequazione.
- Determinare le radici reali dell'equazione associata

$$ax^2 + bx + c = 0$$

usando la formula risolutiva:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ con } \Delta = b^2 - 4ac$$

Casi possibili ($a > 0$):

- Se Δ> 0: due radici reali e distinte
- Se Δ= 0 : due radici reali coincidenti
- Se Δ<0 : nessuna radice reale

Le disequazioni di II grado

Esempio. Risolvere la seguente disequazione:

$$-x^2 + 12x - 11 \geq 0$$

Poiché il coefficiente di x^2 è negativo, moltiplichiamo entrambi i membri per -1, invertendo il verso della disequazione:

$$x^2 + 12x - 11 \leq 0$$

Calcolare il discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12^2 - 4(1)(11) = 144 - 44 = 100$$

L'equazione associata ha due radici reali e distinte:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{12 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 11$$

La soluzione è l'intervallo compreso tra le due radici:

$$1 \leq x \leq 11$$



Le proporzioni

Una proporzione è un'uguaglianza tra due rapporti. Quattro numeri a, b, c, d (con $b \neq 0$ e $d \neq 0$) formano una proporzione se:

$$a : b = c : d$$

In ogni proporzione, il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow a \times d = b \times c$$

Gli estremi sono il primo e il quarto termine (a e d), i medi sono il secondo e il terzo (b e c).

Esempio

$$4 : 14 = 2 : 7$$

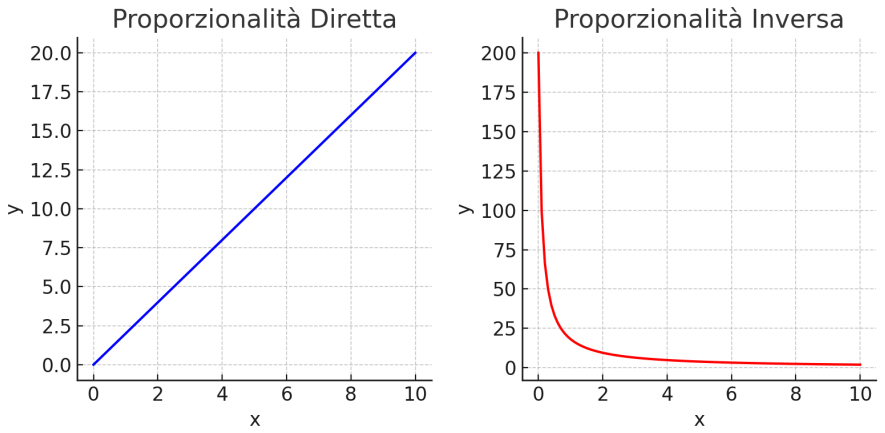
Infatti:

$$4 \times 7 = 14 \times 2$$

Quindi la proporzione è vera

Proporzionalità diretta ed inversa

In chimica, fisica e farmacologia, molte grandezze variano in modo collegato: la quantità di una influenza direttamente o inversamente l'altra. Comprendere questo legame è fondamentale per descrivere reazioni, dosaggi e fenomeni di equilibrio.



Le relazioni di proporzionalità permettono di descrivere e prevedere l'andamento di processi fondamentali, dal laboratorio alla pratica clinica.

📘 **Proporzionalità Diretta**

- Assorbanza ∝ concentrazione (Legge di Lambert–Beer) → maggiore concentrazione, maggiore assorbanza della soluzione.
- Dose somministrata ∝ concentrazione plasmatica (entro limiti di linearità)
- Velocità di reazione ∝ concentrazione dei reagenti (reazioni di primo ordine)

📗 **Proporzionalità Inversa**

- Pressione ∝ 1/Volume (Legge di Boyle-Mariotte per gas ideali)
- Tempo di dimezzamento ∝ 1/costante di velocità (in cinetica chimica)
- Biodisponibilità ∝ 1/tasso di eliminazione (farmacocinetica)

la proporzionalità è spesso valida solo entro intervalli lineari; fuori da essi, subentrano fenomeni di saturazione o non linearità.

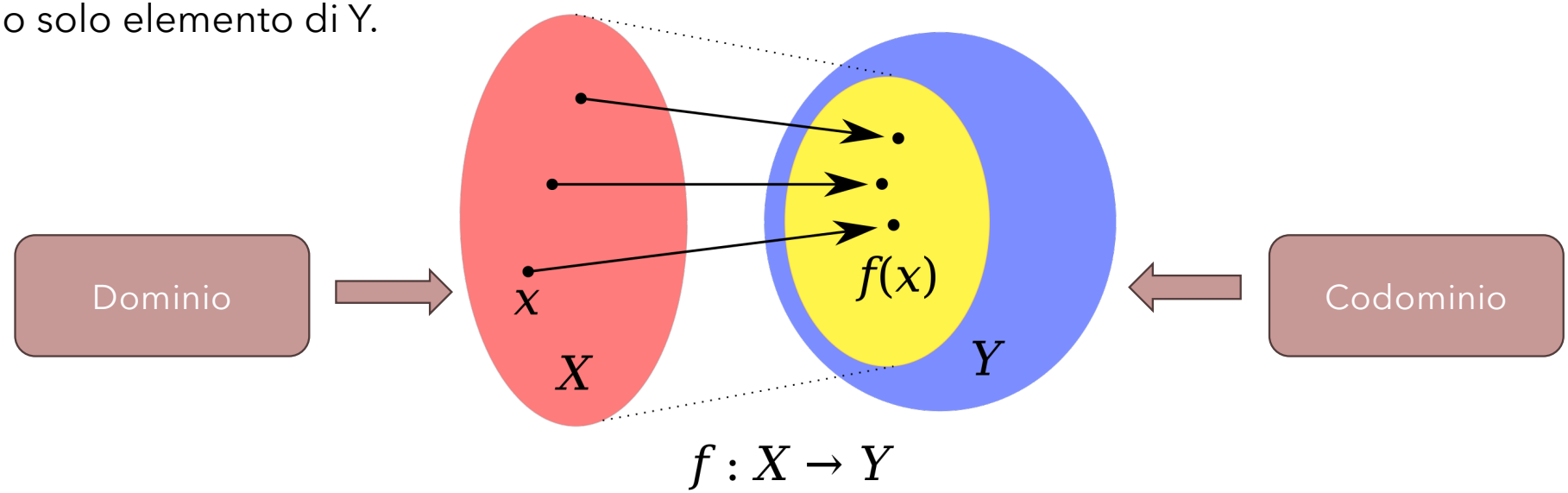
Parte 1

Le funzioni

Definizione di funzione

Siano dati due insiemi X e Y detti rispettivamente **Dominio** e **Codominio**.

Una funzione di X in Y è una relazione che ad ogni elemento di X fa corrispondere uno e uno solo elemento di Y.



Definizione di funzione

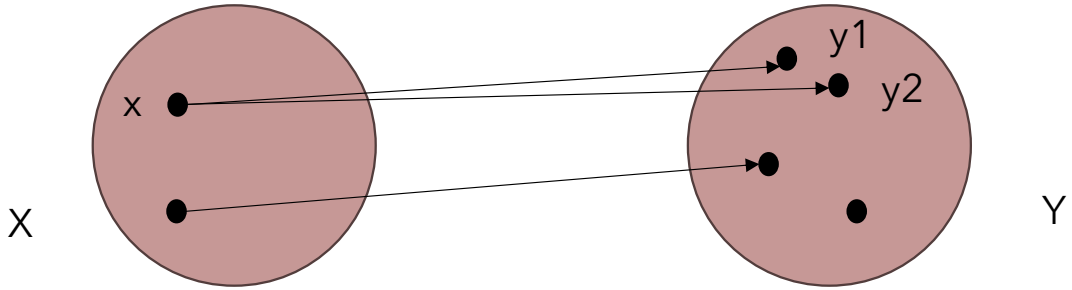
Se indichiamo con f tale funzione scriveremo $f : X \rightarrow Y$, oppure $y = f(x)$ intendendo che ad ogni elemento x corrisponde, tramite la funzione f, l'elemento y.

Importante:

- Ogni elemento del dominio X deve avere un corrispondente.
- Il corrispondente di un elemento del dominio è uno e un solo elemento del codominio Y.

Definizione di funzione

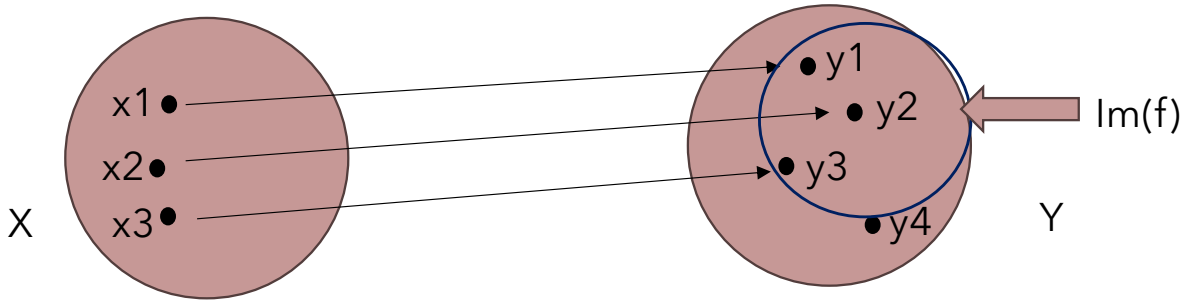
Questa non è una funzione:



Perché esiste un elemento di X che ha 2 corrispondenti in Y.

Definizione di funzione

è possibile che alcuni elementi di Y, non siano corrispondenti di alcun elemento di X.



L'insieme f(X) formato da tutti gli elementi di Y che sono i corrispondenti di un elemento di X si chiama Immagine di f e si indica con Im(f).

La variabile x si chiama anche **variabile indipendente**. La variabile y si chiama anche **variabile dipendente**.

Esempi di funzioni

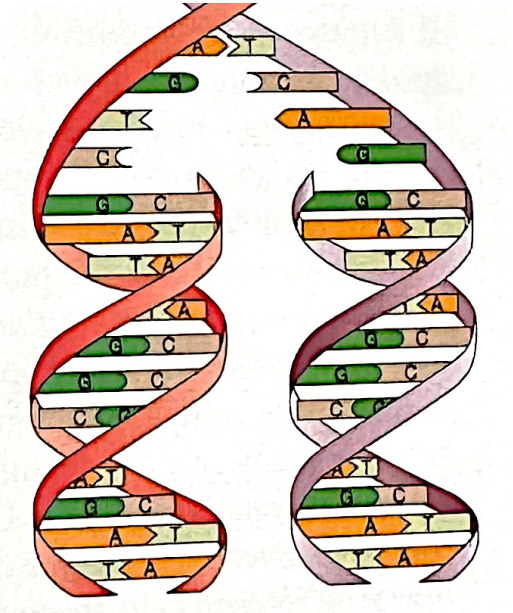
Il DNA è formato da due filamenti uniti da legami idrogeno tra basi azotate (A, T, G, C), che si appaiano in modo complementare: **A con T** e **C con G**.

Questo meccanismo può essere visto come una funzione matematica che associa a ogni sequenza di basi di un filamento la sequenza complementare sull'altro.

f(A) := T, f(T) := A, f(C) := G, f(G) := C

Quindi, data una sequenza, si può ricavare la corrispondente sull'altro filamento applicando questa regola a ogni base.

Dunque, per esempio, f(CGGGATGCGGG AATGGA) = GCCCTACGCCCTTACCT



Funzione reale a variabile reale

Se Dominio e Codominio sono sottoinsiemi dell'insieme R dei numeri reali, la funzione si dice **reale a variabile reale.**

Una funzione reale a variabile reale si può rappresentare in un grafico cartesiano, usando l'asse x per rappresentare l'insieme X = Dominio e l'asse y per rappresentare l'insieme Y = Codominio.

Dati

- un sistema di assi cartesiani O x y,
- una funzione $f : X \to Y$, tale che $y = f(x)$, con $x \in X$ e $y \in Y$,
  il punto $P \equiv (x,y)$, cioè $P \equiv (x,f(x))$, appartiene al grafico della funzione f.

Funzione reale a variabile reale

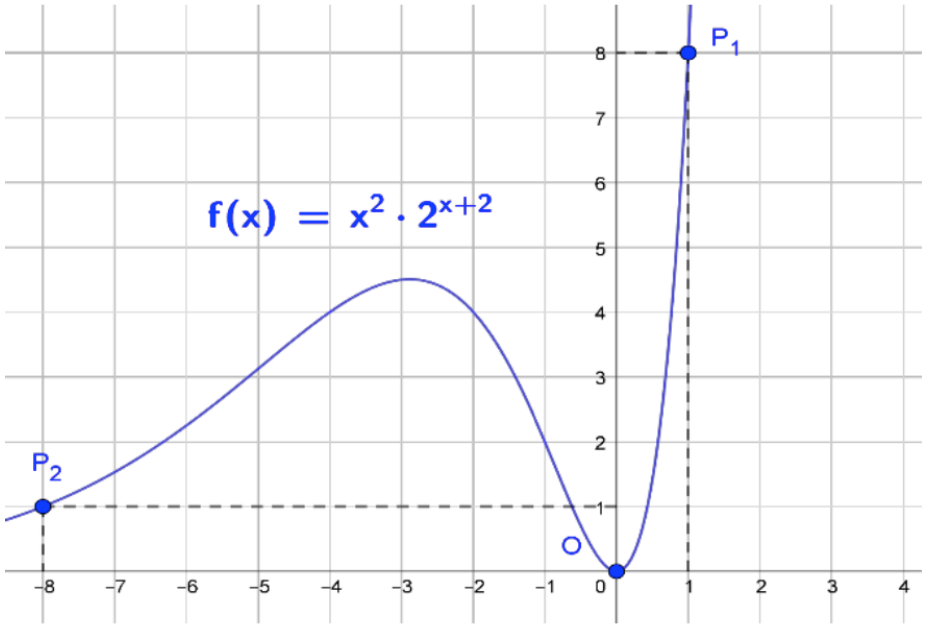
Esempio: Sia $f : R \to R$ definita da $f(x) = x^2 \cdot 2^{x+2}$.

- Se $x=0$, $y = f(x) = f(0) = 0^2 \cdot 2^{0+2} = 0$. Quindi il punto $O \equiv (0,0)$ appartiene al grafico di f.
- Se $x = 1$, $y = f(x) = f(1) = 1^2 \cdot 2^{1+2} = 8$. Quindi il punto $P1 \equiv (1,8)$ appartiene al grafico di f.
- Se $x = -8$, $y = f(x) = f(-8) = (-8)^2 \cdot 2^{-8+2} = 64 \cdot 2^{-6} = 1$. Quindi il punto $P2 \equiv (-8,1)$ appartiene al grafico di f.

Funzione reale a variabile reale

La funzione $f : R \rightarrow R$ definita da $f(x) = x^2 \cdot 2^{x+2}$, ha come **Dominio** l'intero insieme dei numeri reali, perchè dato un numero reale x, posso sempre fare il quadrato di x, posso sempre calcolare 2 elevato a (x + 2) e fare il prodotto di questi due fattori.

Il **Codominio** della funzione f è R ma con le operazioni di quadrato ed elevamento a potenza si ottengono sempre numeri reali positivi o nulli, quindi anche il loro prodotto sarà positivo o nullo. Non otterremo mai una y negativa. Quindi **l'insieme immagine** di f è $Im(f) = R^+ \cup \{0\}$, cioè l'insieme di tutti i numeri reali positivi e dello zero.



Domini di funzioni reali a variabile reale

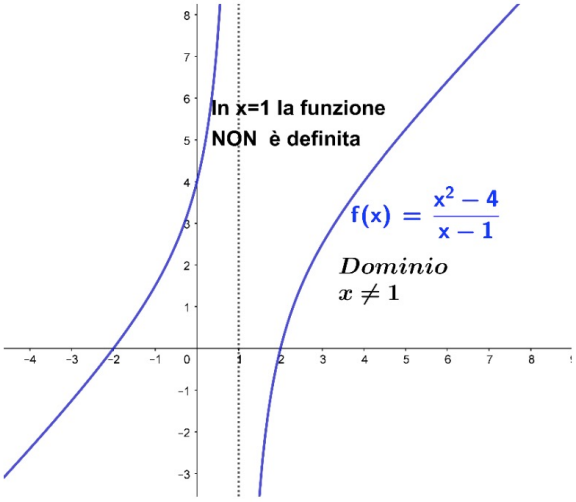
Non sempre tutte le funzioni reali a variabili reali hanno come Dominio l'intero insieme R.

Vediamo quali sono i tre casi principali di limitazioni di Dominio che possiamo incontrare:

- Funzione con quoziente
- Funzione con radice
- Funzione con logaritmo

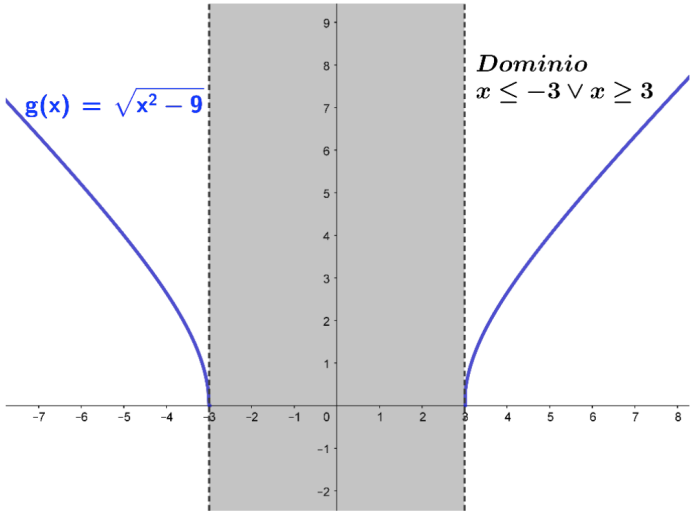
Domini di funzioni reali a variabile reale

Funzione con quoziente. Esempio: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$. Poichè non si può mai dividere per zero, occorre accertarsi che il denominatore $(x - 1)$ sia diverso da zero. Pertanto il Dominio di questa funzione è $x \neq 1$



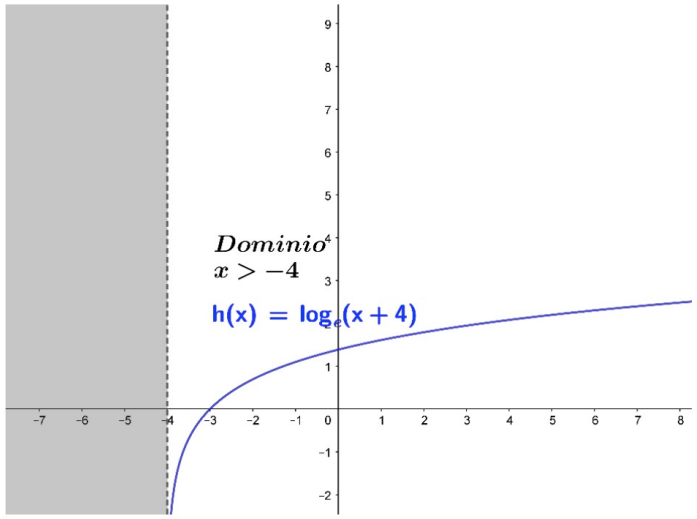
Domini di funzioni reali a variabile reale

Funzione con radice. Esempio: $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$. Poichè nei numeri reali non si può estrarre la radice quadrata (o di ordine pari) di un numero negativo, occorre accertarsi che il radicando $x^2 - 9$ sia maggiore o uguale a zero. Pertanto il Dominio di questa funzione è $x \leq -3 \vee x \geq 3$;



Domini di funzioni reali a variabile reale

Funzione con logaritmo. Esempio: h(x) = log(x + 4). Poichè l'argomento di un logaritmo deve essere sempre positivo, occorre accertarsi che l'argomento (x + 4) sia positivo. Pertanto il Dominio di questa funzione è $x > -4$.



Esercizio

a) Trovare il Dominio della seguente funzione: $f(x) = 3 - \sqrt{12 + 4 - {}^{2}}$

b) Troviamo le immagini di $x_1 = 2$, di $x_2 = 8$ e la controimmagine di $y_1 = 3$.

Svolgimento

a) Trovare il Dominio della seguente funzione: $f(x) = 3 - \sqrt{12 + 4 - {}^2x}$

- Iniziamo dal Dominio. Poiché un radicando deve sempre essere maggiore o uguale a zero, dobbiamo porre $12 + 4x - x^2 \geq 0$.
- Per trovare i punti in cui la funzione $x2-4x-12 = 0$, dobbiamo risolvere l'equazione $x^2 - 4x - 12 = 0$.
- Usiamo la formula quadratica per risolvere questa equazione del tipo $ax^2+bx+c=0$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Svolgimento

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 8}{2}$$

Quindi, i due punti in cui $x^2 - 4x - 12$ è uguale a zero sono:

$$x_1 = \frac{4+8}{2} = 6$$

$$x_2 = \frac{4-8}{2} = -2$$

Svolgimento

Pertanto, il dominio della funzione $f(x) = 3 - x\sqrt{12 + 4x - x^2}$ è determinato dai valori di x in cui l'espressione sotto la radice è non negativa, cioè $12 + 4x - x^2 \geq 0$, che nel nostro caso è $x \leq -2$ o $x \geq 6$. Quindi, il dominio della funzione è $x \leq -2$ o $x \geq 6$.

b) Trovare le immagini di $x_1 = 2$, di $x_2 = 8$ e la controimmagine di $y_1 = 3$.

Svolgimento

b) Trovare le immagini di $x_1 = 2$, di $x_2 = 8$ e la controimmagine di $y_1 = 3$.

Per trovare le immagini di $x_1 = 2$ e $x_2 = 8$ nella funzione $f(x) = 3 - \sqrt{12 + 4x - x^2}$, sostituiremo questi valori di x nella funzione $f(x)$.

1. Per $x_1 = 2$:

$$
\begin{aligned}
f(2) &= 3 - \sqrt{12 + 4(2) - (2)^2} \\
&= 3 - \sqrt{12 + 8 - 4} \\
&= 3 - \sqrt{16} \\
&= 3 - 4 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Quindi, l'immagine di $x_1 = 2$ è $f(2) = -1$.

1. Per $x_2 = 8$:

$$
\begin{aligned}
f(8) &= 3 - \sqrt{12 + 4(8) - (8)^2} \\
&= 3 - \sqrt{12 + 32 - 64} \\
&= 3 - \sqrt{-20}
\end{aligned}
$$

L'espressione sotto la radice è negativa, quindi la funzione non è definita per $x_2 = 8$ nel dominio reale. Non possiamo calcolare l'immagine di $x_2 = 8$ in questa funzione.

Svolgimento

Per trovare la controimmagine di $y_1 = 3$, dobbiamo risolvere l'equazione $f(x) = 3$ per x:

$3 - \sqrt{12 + 4x - x^2} = 3$

Isoliamo la radice:

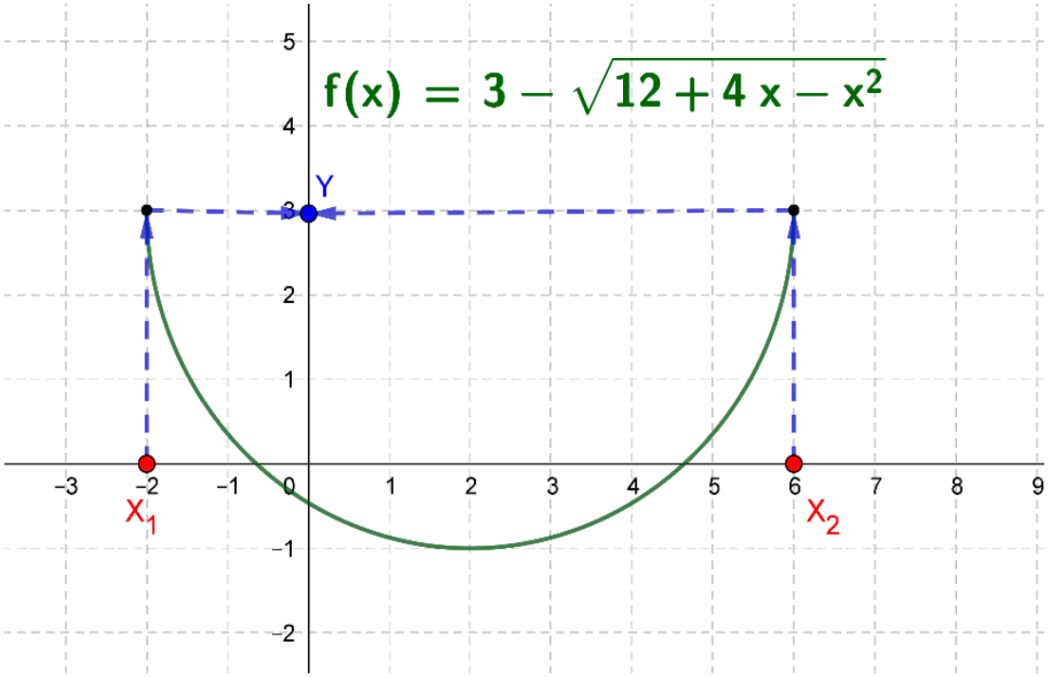
$\sqrt{12 + 4x - x^2} = 0$

Siccome la radice è zero solo quando l'espressione sotto la radice è zero, risolviamo:

$12 + 4x - x^2 = 0$
$x^2 - 4x - 12 = 0$

Ora possiamo usare la formula quadratica per risolvere questa equazione. Tuttavia, poiché abbiamo già fatto questa operazione precedentemente, i risultati sono $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$.

Quindi, la controimmagine di $y_1 = 3$ nella funzione $f(x)$ è $x_1 = 2$ e $x_2 = 6$.



Funzione iniettiva

Sia $f : X \to Y$ una funzione.

Allora f si dice **iniettiva** se a elementi diversi del Dominio X corrispondono elementi diversi del Codominio Y, cioè se non esiste una coppia di elementi del Dominio che abbiano lo stesso corrispondente mediante la f.

In simboli, f è iniettiva se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$, si ha **che** $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Data una funzione iniettiva f, con l'eventuale accorgimento di limitare il nuovo dominio, è sempre possibile trovare la sua funzione inversa f^{-1}.

Funzione iniettiva

Esempio 1

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ definita nel dominio dei numeri reali (R).

Se prendiamo due numeri reali distinti x_1 e x_2 tali che $x_1 \neq x_2$, ma $f(x_1) = f(x_2)$, ciò dimostra che la funzione non è iniettiva.

Supponiamo $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$. Ora calcoliamo $f(x_1)$ e $f(x_2)$:

$f(-2) = (-2)^2 = 4$
$f(2) = 2^2 = 4$

Anche se $x_1 \neq x_2$ (sono -2 e 2, quindi sono distinti), i loro valori al quadrato, cioè $f(x_1)$ e $f(x_2)$, sono uguali, entrambi sono 4.

Questo dimostra che la funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva, in quanto due valori distinti (-2 e 2 in questo caso) nel dominio vengono mappati allo stesso valore nel codominio. In una funzione iniettiva, ciò non dovrebbe accadere; ogni valore nel dominio dovrebbe corrispondere a un solo valore nel codominio.

Funzione iniettiva

Esempio 2

Sia data, ad esempio, la funzione f : R → R, definita da f(x) = x_2. La funzione f **non è iniettiva**, perchè esistono diversi valori di x che hanno lo stesso corrispondente mediante la f, per esempio: f(3) = 9 ma anche f(−3) = 9. Pertanto la f non è invertibile, perchè la funzione che vorrei usare come inversa, applicata al numero 9 non saprebbe se restituirmi 3 oppure -3.

La stessa funzione, definita solo nel Dominio R+, invece, si può invertire e la sua inversa è la funzione f -1: R → R+, definita da $f-1(x) = \sqrt{x}$.

Se $f(3) = 3^2 = 9$, allora $f^{-1}(9) = \sqrt{9} = 3$.

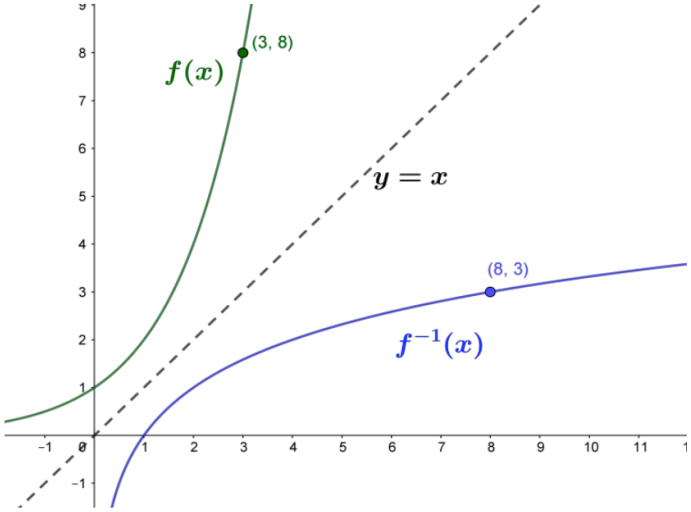
Funzione inversa

Invertire una funzione significa sostanzialmente poter scambiare i ruoli della variabile indipendente (x) e della variabile dipendente (y).

Se, per esempio, il punto (3, 8) appartiene al grafico della funzione f, il punto (8, 3) apparterrà al grafico della f^{-1}.

Funzione inversa

Questo vuol dire che i due grafici delle funzioni f ed f^{-1} sono l'uno il simmetrico dell'altro rispetto alla retta bisettrice del primo quadrante, che come funzione può essere espressa dalla relazione y = x.



Esercizi

Sia data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x + 1$, che associa, per esempio, a $x^* = 3$ il numero reale $f(x^*) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$.

La funzione f è iniettiva, pertanto invertibile, e la sua inversa è la funzione $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$, che associa, per esempio, a $x^{**} = 7$ il numero reale $f^{-1}(x^{**}) = \frac{7-1}{2} = 3$.

Infatti se $y = 2x + 1$, allora, isolando la x (che voglio sia la mia nuova variabile dipendente) si ha: $2x = y-1$, da cui $x = \frac{y-1}{2}$.

Esercizi

Per calcolare l'inversa della funzione $f(x) = 2x + 1$, denotata come f^{-1}, dobbiamo risolvere per x nell'equazione $y = 2x + 1$ e ottenere x in termini di y. Questo rappresenta la funzione inversa f^{-1}, dove y è la variabile indipendente (l'input) e x è la variabile dipendente (l'output).

Iniziamo con l'equazione della funzione originale:

$y = 2x + 1$

Ora risolviamo per x:

$y - 1 = 2x$

$x = \frac{y-1}{2}$

Quindi, l'espressione per l'inversa $f^{-1}(y)$ è:

$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$

Ora, sostituendo y con x^* (che è 3), otteniamo l'inverso per x^*:

$f^{-1}(x^*) = \frac{x^*-1}{2}$
$f^{-1}(3) = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Quindi, l'inverso di $x^* = 3$ è $f^{-1}(3) = 1$ nell'esempio considerato.

Esercizio

Invertiamo, se possibile, la funzione f : R → R definita da $f(x) = x^3 + 5$.

Se y è il corrispondente di x allora $y = x^3 + 5$.

Isoliamo la x: $x^3 = y-5$, da cui $x= \sqrt{y-5}$.

La funzione inversa di f è allora

$f^{-1}(x) : 3= \sqrt{x} - 5$.

Esercizio

Invertiamo, se possibile, la funzione f : R → R definita da f(x) = x^3 + 5.

Per invertire la funzione $f(x) = x^3 + 5$ e trovare la sua inversa, seguiamo i passaggi indicati di seguito:

1. Scriviamo la funzione originale e sostituisci $f(x)$ con y: $y = x^3 + 5$.
2. Risolviamo per x in termini di y.
3. Scambiamo x e y per ottenere l'inversa della funzione.

Iniziamo con l'equazione $y = x^3 + 5$ e risolviamo per x:

$$y = x^3 + 5$$

Sottraiamo 5 da entrambi i lati dell'equazione:

$$y - 5 = x^3$$

Ora, per ottenere x, dobbiamo prendere la radice cubica di entrambi i lati dell'equazione:

$$x = \sqrt[3]{y - 5}$$

Adesso abbiamo trovato x in funzione di y.

Per ottenere l'inversa, scambiamo x e y:

$$y = \sqrt[3]{x - 5}$$

Questa è l'inversa della funzione $f(x) = x^3 + 5$. Tuttavia, è importante notare che questa inversa è definita solo per $x \geq 5$ poiché la radice cubica di un numero negativo non è definita nel campo dei numeri reali.

Quindi, l'inversa di $f(x) = x^3 + 5$ è $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 5}$ per $x \geq 5$.

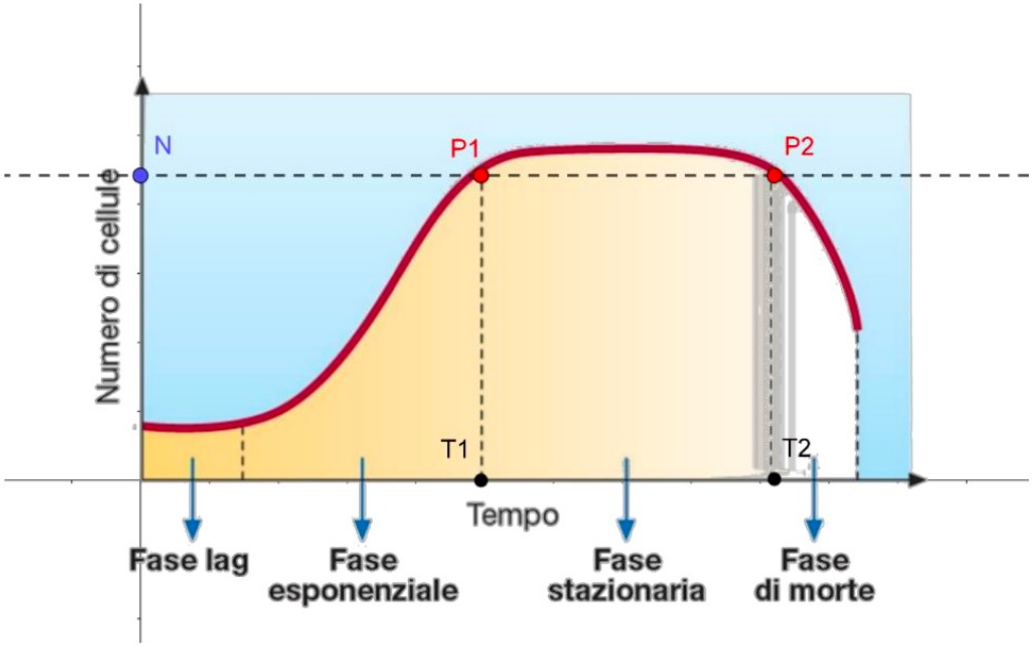
Le funzioni nella vita reale

L'andamento della numerosità di una specifica popolazione cellulare, oggetto del nostro studio, così come anche, ad esempio, l'andamento della crescita di una pianta, può essere espresso da una funzione, che restituisce, al variare del tempo, la numerosità della popolazione.

In questo caso ci sono diverse fasi:

- Fase lag (o di ritardo)
- Fase esponenziale
- Fase stazionaria
- Fase di morte

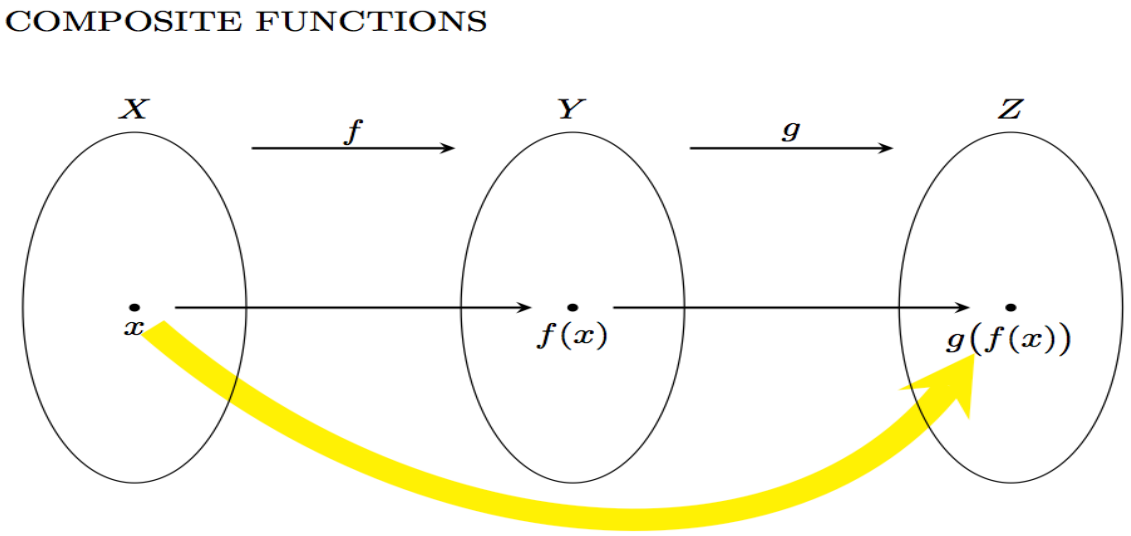
Le funzioni nella vita reale



La funzione che esprime la numerosità di una popolazione cellulare non è iniettiva!

Funzione composta

Date due funzioni, $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, possiamo definire la funzione composta $h : X \to Z$, come $h(x) = g(f(x))$.



Funzione composta

Attenzione! Perchè h sia una funzione, quindi per ogni elemento del suo Dominio X esista uno e un solo corrispondente nel suo Codominio Z, occorre che l'insieme Y, che è il dominio della g, non sia semplicemente il Codominio della f, ma che coincida anche con la sua Immagine, Y = Im(f).

Quando definiamo una funzione composta, quindi applichiamo prima una funzione f a un valore x, ottenendo y = f(x) e poi una funzione g al valore z, ottenendo z = g(y) = g(f(x)).

Esercizi

Componiamo le funzioni reali a variabile reale $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x^2$.

- Applichiamo f(x) a g(x):

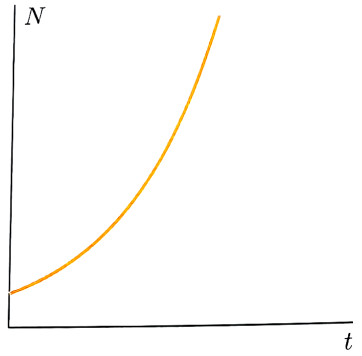
$f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 3$ (sostituendo x^2 al posto di x in f(x))

- Quindi, la funzione risultante dalla composizione è $h(x) = x^2 + 3$.
- In questo caso, in cui non ci sono problemi di Dominio (entrambe le funzioni hanno sia Dominio che Codominio uguale a R), possiamo comporre le due funzioni f e g, applicando stavolta prima g e poi f. Otterremo, in questo caso, una funzione diversa dalla h.

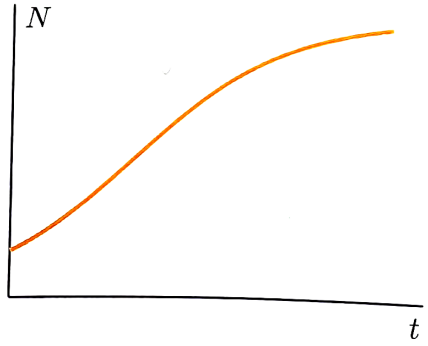
Funzioni monotone o continue a tratti

Le funzioni che in tutto il loro Dominio crescono o decrescono sempre si dicono **monotòne**.

Non tutte le funzioni sono monotòne, nel loro Dominio. Spesso per analizzare come una funzione cresce o decresce occorre suddividere il Dominio in intervalli, osservando in quali intervalli la funzione cresce e in quali decresce.



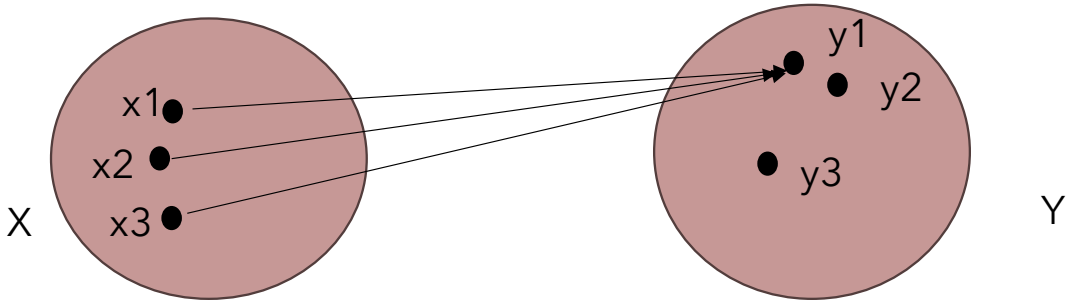
Crescita malthusiana di una coltura cellulare: la funzione N(t) è monotona crescente.



Crescita logistica di una coltura cellulare: la funzione N(t) è monotona crescente.

Funzioni costanti

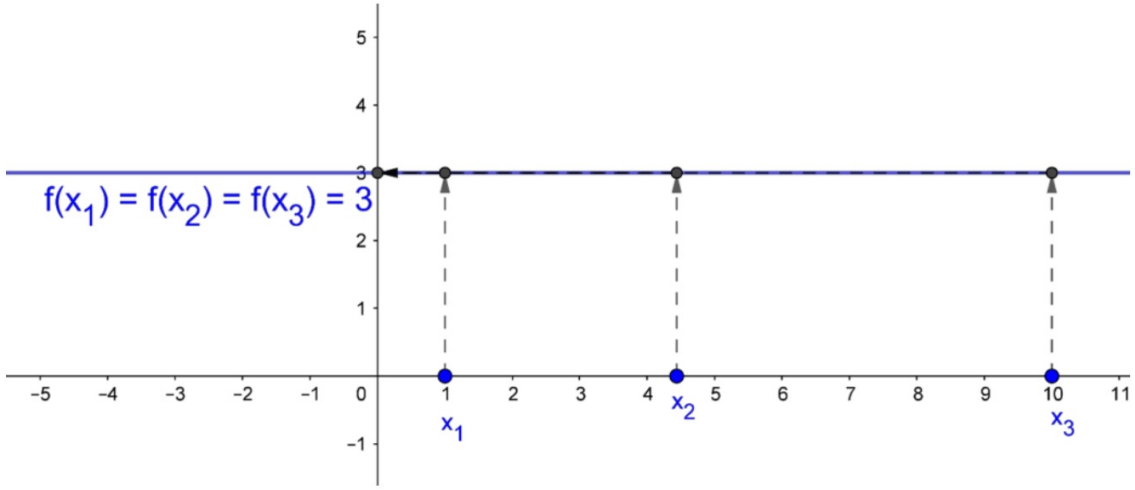
Una particolare funzione è la funzione **costante**, che, ad ogni elemento del Dominio associa sempre lo stesso elemento del Codominio:



f(x)=k

Funzioni costanti

Una funzione reale a variabile reale definita in R, costante, definita da f(x) = k , ha il grafico di una retta parallela all'asse delle x. Infatti, ad ogni numero reale corrisponde sempre il numero k.



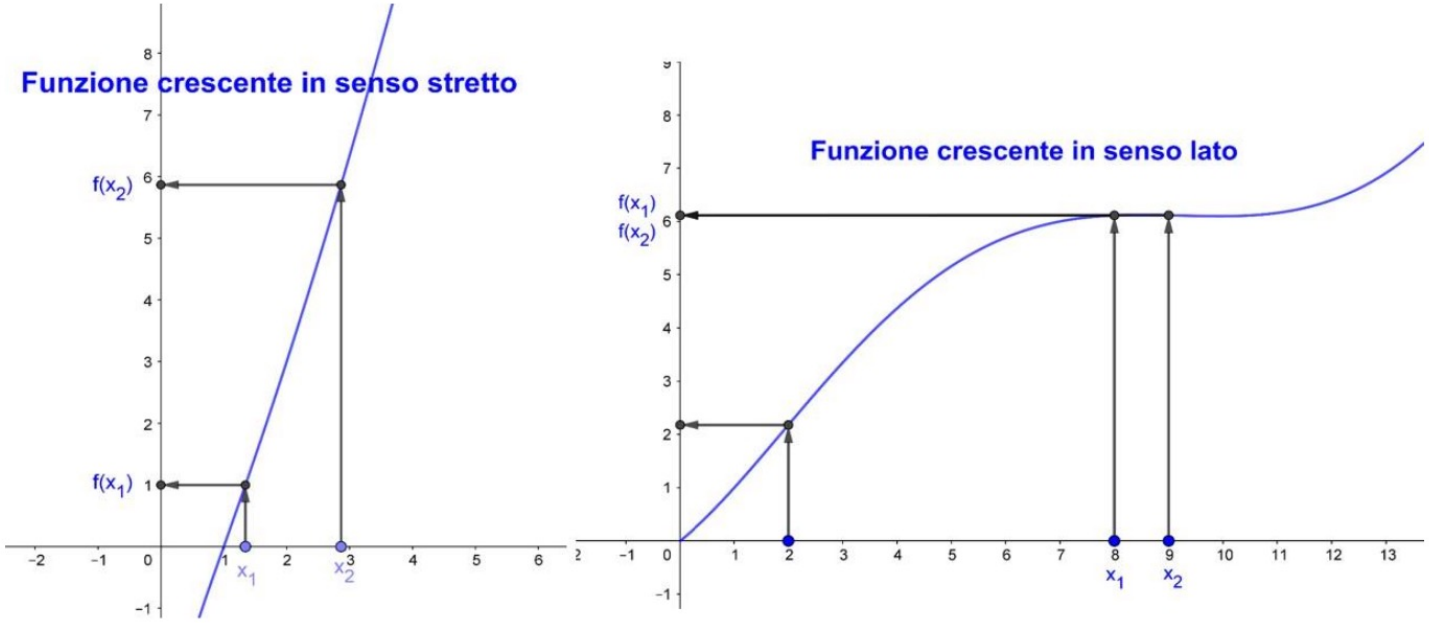
Funzioni crescenti

- Data una funzione reale a variabile reale $f : D \rightarrow R$, f si dice **crescente in senso stretto** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1<x_2$, si ha $f(x_1) < f(x_2)$, cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine crescenti.

- La funzione f si dice **crescente in senso lato** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1<x_2$, si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$, cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine crescenti oppure uguali.

- Le funzioni crescenti sono monotone, mantengono dunque un certo ordine di grandezza tra gli elementi del suo dominio.

Funzioni crescenti

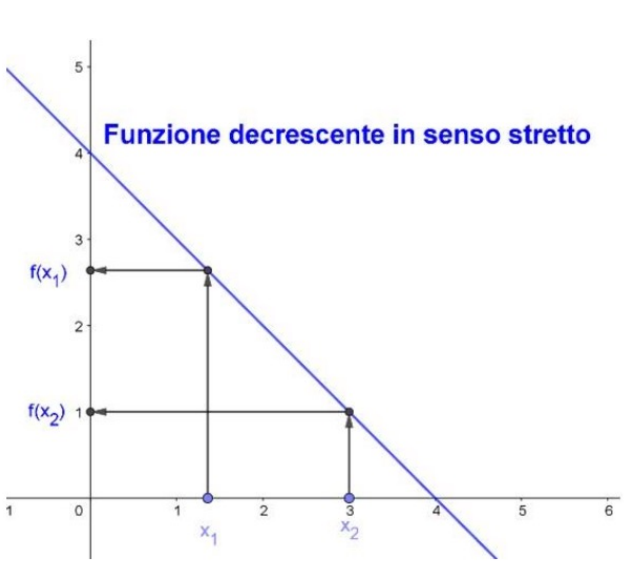


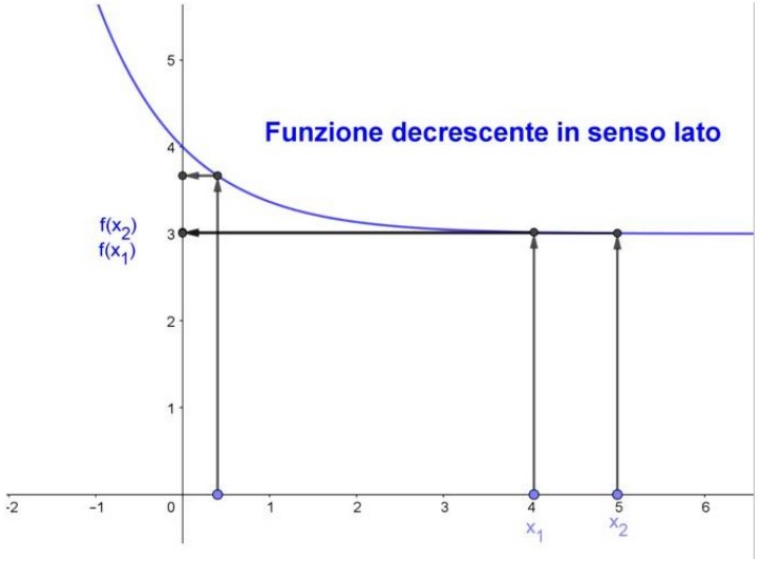
Funzioni decrescenti

- Data una funzione reale a variabile reale $f : D \rightarrow R$, f si dice **decrescente in senso stretto** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1<x_2$, si ha $f(x_1) > f(x_2)$, cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine decrescenti.

- La funzione f si dice **decrescente in senso lato** se per ogni coppia di elementi di D, x_1 ed x_2, con $x_1<x_2$, si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$ cioè a elementi del Dominio crescenti corrispondono elementi dell'immagine decrescenti oppure uguali.
- Le funzioni decrescenti sono monotòne.

Funzioni decrescenti

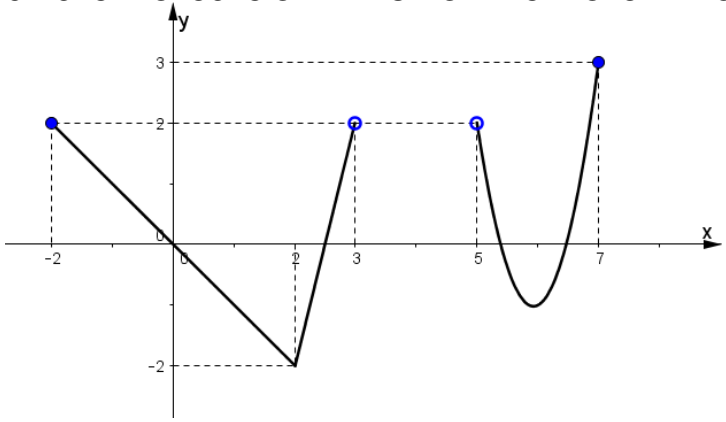




Funzioni continue a tratti

Alcuni fenomeni naturali non possono essere descritti da un'unica funzione. Questo avviene quando ci sono dei punti critici, che possiamo interpretare come soglie, ad di là delle quali il fenomeno cambia comportamento. Ovviamente in natura difficilmente il cambiamento avverrà bruscamente, da un istante all'altro.

E' possibile interpretare cambiamenti di un fenomeno di questo tipo mediante funzioni definite a tratti, cioè funzioni che hanno una diversa definizione in diversi intervalli del Dominio.



Funzioni continue a tratti

In genere funzioni definite a tratti si scrivono con una parentesi graffa. Esempio:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1,\ se\ 0 \le x \le 2 \\ 2-1,\ \ e\ > 2 \end{cases}$$

può rappresentare un fenomeno che dall'istante 0 all'istante 2 ha un andamento quadratico e dall'istante 2 in poi un andamento lineare.

Funzioni continue a tratti

In generale:

$$f(x)=\begin{cases} g(x),\ se\ x \le x_0 \\ h(x),\ se\ > _0 \end{cases}$$

f è continua nel punto $x = x_0$ se $g(x_0) = h(x_0)$.

Se invece $g(x_0) \neq h(x_0)$, allora in x_0 c'è una **discontinuità di salto**.

Esempio di funzione definita a tratti

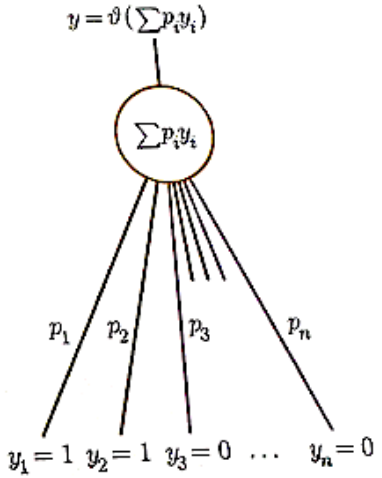
Descriviamo lo stato di un neurone artificiale mediante una variabile y che assume solo I due valori 0 e 1. Il valore y = 0 corrisponde allo stato inibito, mentre y = 1 corrisponde allo stato eccitato.

Nella realtà, lo stato y del neurone dipende dalla somma dei segnali inibitori ed eccitatori ricevuti da tutti i neuroni a esso collegati. Questa "somma di segnali" è, fisicamente, un potenziale elettrochimico complessivo, che può essere misurato, ed è dunque esprimibile mediante un numero reale.

Nel più semplice modello di neurone lo stato y dipende dal segnale complessivo x attraverso un meccanismo di soglia. Se il potenziale è inferiore a x = 0 (valore di soglia) il neurone rimane nello stato inibito y = 0; non appena la variabile x supera il valore 0, il neurone passa nello stato eccitato y = 1.

In termini matematici, il fenomeno può essere descritto dalla funzione a gradino y = v(x) così definita:

$$\vartheta(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

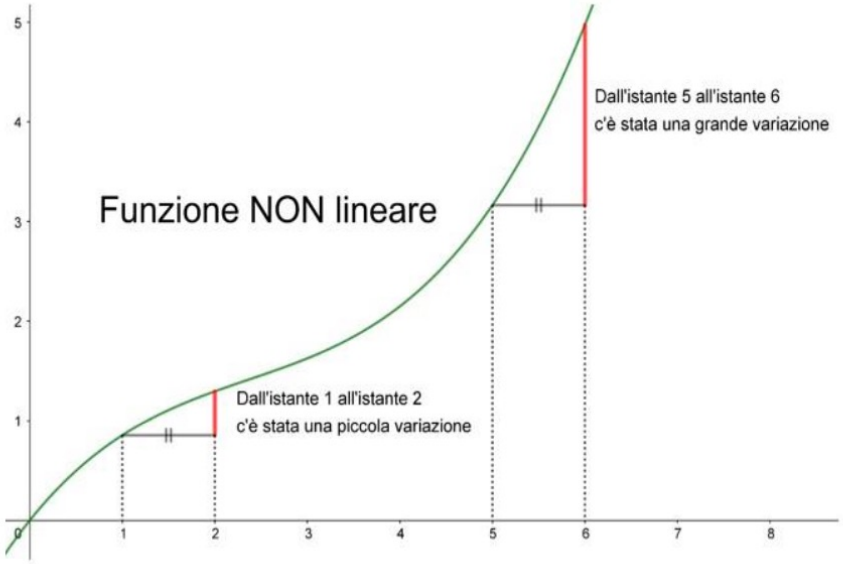


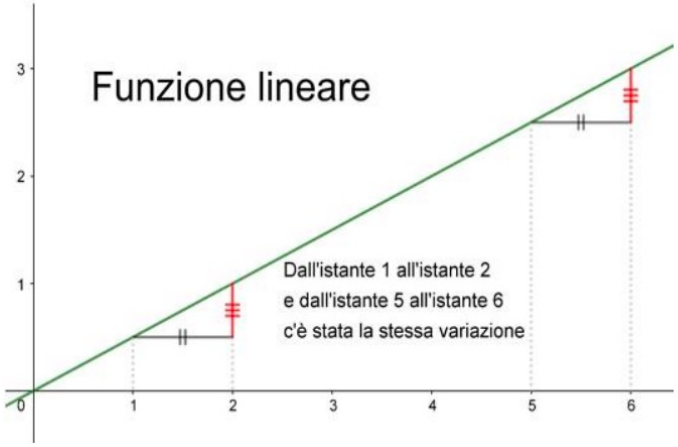
detta funzione ϑ o anche **funzione di Heaviside**.

Funzioni lineari

- Nei fenomeni naturali è importante osservare se il fenomeno oggetto di studio è in crescita o in decrescita.
- Questo viene osservato mediante il comportamento di eventuale monotònia della funzione che modellizza il fenomeno.
- Spesso è utile sapere anche QUANTO un fenomeno sia in crescita o in decrescita.
- Questa valutazione può essere fatta facilmente mediante funzioni lineari, cioè **funzioni che sono rappresentate da rette nel piano e che sono espresse analiticamente da una equazione di primo grado.**

Funzioni lineari



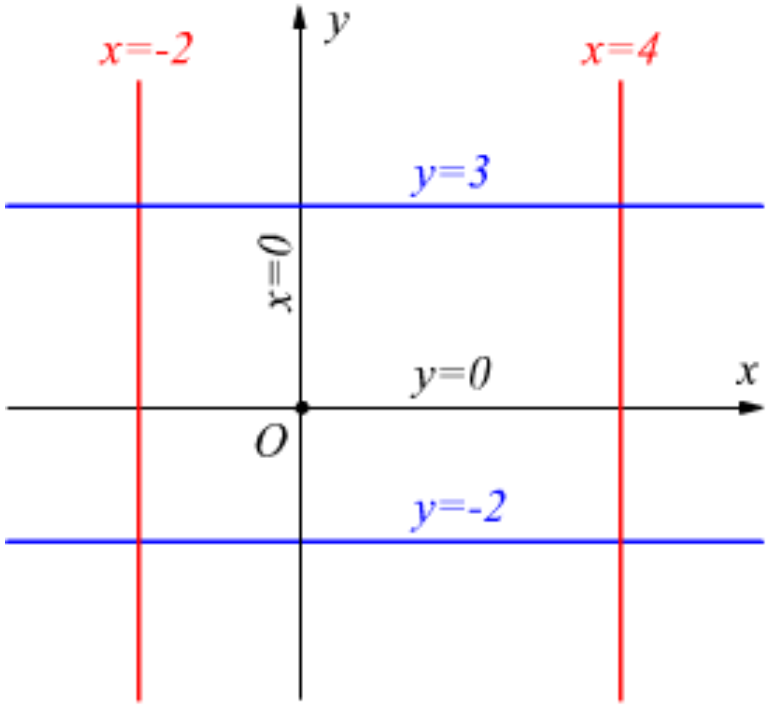


In figura, nella funzione NON lineare a incrementi della x sempre di 1 corrispondono **differenti** incrementi della y; mentre nella funzione lineare a incrementi della x sempre di 1 corrispondono **uguali** incrementi della y.

Funzioni lineari

- Le **funzioni lineari** (espresse analiticamente da equazioni in cui la variabile indipendente compare al più di primo grado) possono tutte essere rappresentate da **rette** nel piano cartesiano.
- *Ma non tutte le rette del piano cartesiano sono funzioni!* Infatti l'asse y e tutte le rette ad esso parallele non rappresentano funzioni, poichè a ogni x del Dominio (che in questo caso sarebbe formato da un solo punto) corrisponderebbero infinite y.
- L'equazione di una retta parallela all'asse y è del tipo x = k, dove k è un numero reale.

Funzioni lineari



- Per esempio, in figura vediamo in rosso 2 rette parallele all'asse y, una di ascissa x=-2 e una di ascissa x=4. Le ordinate corrispondenti sono infinite.

- Analogamente, le due rette in blu sono parallele all'asse x, una ha ordinata y=3 e l'altra y=-2. Le ascisse corrispondenti sono infinite.

- Da questo si evince che **l'equazione dell'asse y è x=0, mentre quella dell'asse x è y=0.**

Funzioni lineari

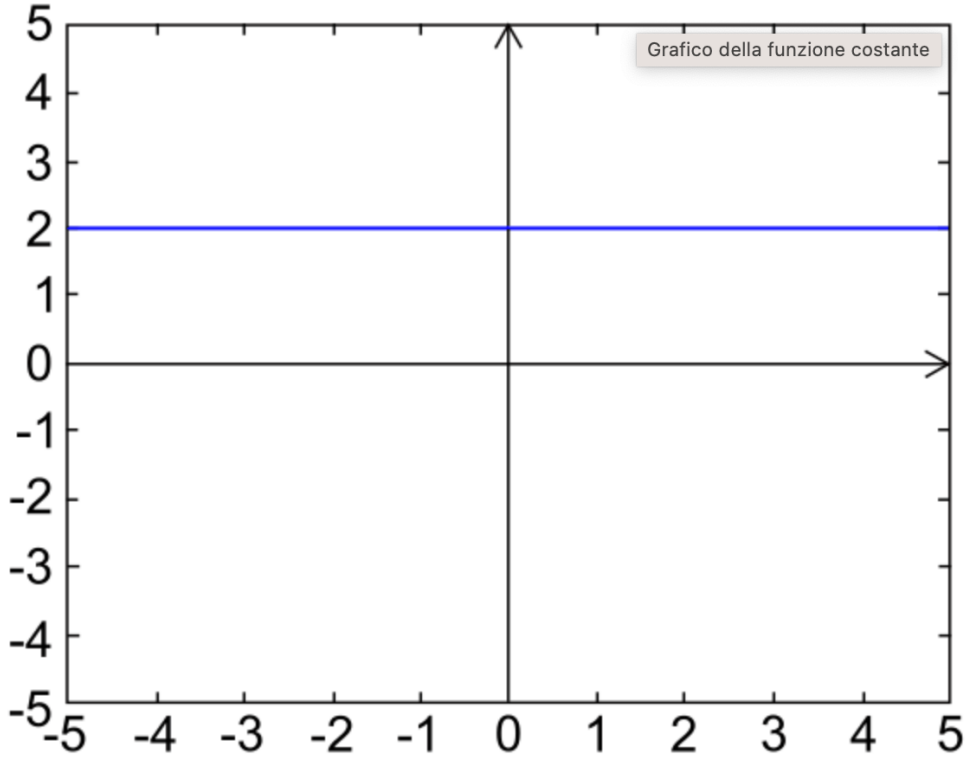
- Le più semplici funzioni lineari sono quelle rappresentate da rette parallele all'asse x.
- Esse sono funzioni **costanti**. Infatti ad ogni x del Dominio corrisponde sempre una sola y.
- L'equazione di una **retta parallela all'asse x** è del tipo y = k, dove k è un numero reale.

Funzioni lineari

- Le più semplici funzioni lineari sono quelle rappresentate da rette parallele all'asse x.
- Esse sono funzioni **costanti**. Infatti ad ogni x del Dominio corrisponde sempre una sola y.
- L'equazione di una **retta parallela all'asse x** è del tipo y = k, dove k è un numero reale.
- Esempio: f(x)=2.
  - ✓ In questo caso, la funzione è una retta parallela all'asse x con un valore costante y=2. Indipendentemente dal valore di x, il valore di y sarà sempre 2 in questa funzione.
  - ✓ Ad esempio, se scegliamo x=0, allora f(0)=2. Se scegliamo x=5, allora f(5)=2. In altre parole, per qualsiasi valore di x che scegliamo, il valore della funzione sarà sempre 2, perché è una funzione costante rappresentata da una retta parallela all'asse x.

Grafico della funzione costante

Il grafico della funzione **costante** è una retta parallela per l'asse delle ascisse.
Es. della funzione costante **y=2**.



Rette passanti per l'origine

- Particolari funzioni lineari sono quelle che associano a x = 0 y =0.
- Le funzioni di questo tipo sono rappresentate da **rette che passano per l'origine del sistema cartesiano** e hanno una espressione analitica del tipo **y = mx**, dove m è un numero reale.
- Nell'equazione che esprime una retta passante per l'origine **f(x) = mx** oppure **y = mx**, il numero reale **m rappresenta la pendenza della retta** e si chiama **coefficiente angolare**.

- Ecco alcuni esempi di funzioni lineari che passano per l'origine con diversi coefficienti angolari:

Per m = 2 : y = 2x	Questa è una retta con pendenza **positiva**
Per m = −1 : y =−x	Questa è una retta con pendenza **negativa**
Per m = 0 : y = 0	Questa è la retta x-asse, che è orizzontale con pendenza **zero**

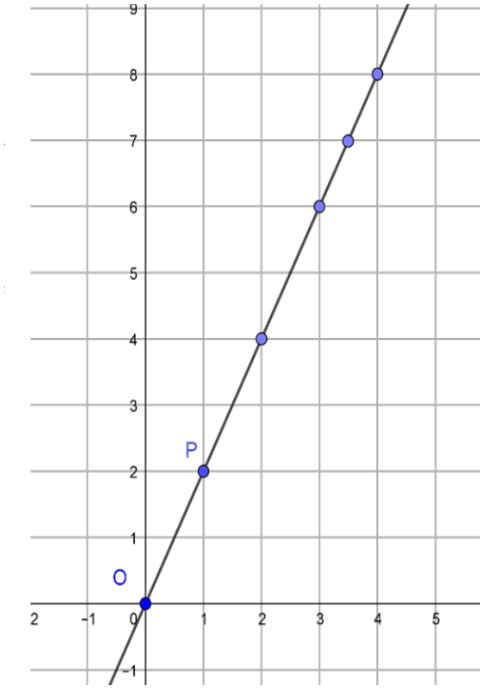
Rette passanti per l'origine

In particolare:

- Se m > 0 a incrementi di x corrispondono incrementi di y di mx (**funzione crescente in senso stretto**);
- Se m = 0 a incrementi di x non corrispondono incrementi di y (**funzione costante**)
- Se m < 0 a incrementi di x corrispondono decrementi di y di |m|x (**funzione decrescente in senso stretto**)

Rette passanti per l'origine

- Consideriamo la retta passante per l'origine e per il punto P ≡ (1,2).
- Tutte le coordinate dei punti della retta OP hanno qualcosa in comune: (2, 4); (3, 6); (3.5, 7); (4, 8).
- Tutte le ordinate (y) sono il doppio delle rispettive ascisse (x), come del resto per il punto (0, 0) e per il punto (1, 2).
- L'equazione di questa retta è y = 2x.
- Questo significa che a incrementi di 1 della x corrispondono sempre incrementi di 2 della y.



Rette passanti per l'origine

- Detto Δx l'incremento della x (differenza delle x) e Δy l'incremento della y (differenza delle y) si ha:

$$\text{coefficiente angolare: } m = \frac{\Delta}{\Delta}$$

- La lettera Δ (D in greco) sta per la parola «Differenza».
- Rette parallele, avendo la stessa pendenza, hanno lo stesso coefficiente angolare.

Esercizi

1. **Scriviamo l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto (2, 6).**

L'equazione è del tipo y = mx. Occorre trovare il valore di m. Poichè la retta cercata passa per il punto (2, 6), a un incremento di x di 2 corrisponde un incremento di y di 6.

Allora m = 6/2 = 3. L'equazione cercata è y = 3x.

2. **Scriviamo l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto (4, -8).**

L'equazione è del tipo y = mx. Occorre trovare il valore di m. Poichè la retta cercata passa per il punto (4, -8), a un incremento di x di 2 corrisponde un incremento di y di – 8, (un decremento

di 8). Allora m =−8/4 = −2. L'equazione cercata è y = −2x.

Retta generica

- Una funzione lineare generica ha un'espressione analitica

y = mx + q, con m e q numeri reali.

- Se *q = 0* ritroviamo una retta passante per l'origine e *y=mx*
- Per costruire una retta generica prendiamo una retta per l'origine e la trasliamo

Per traslare questa retta, possiamo aggiungere un termine costante b a y, che rappresenta il traslato verticale (la retta si sposta su o giù lungo l'asse delle ordinate):

y= mx + b

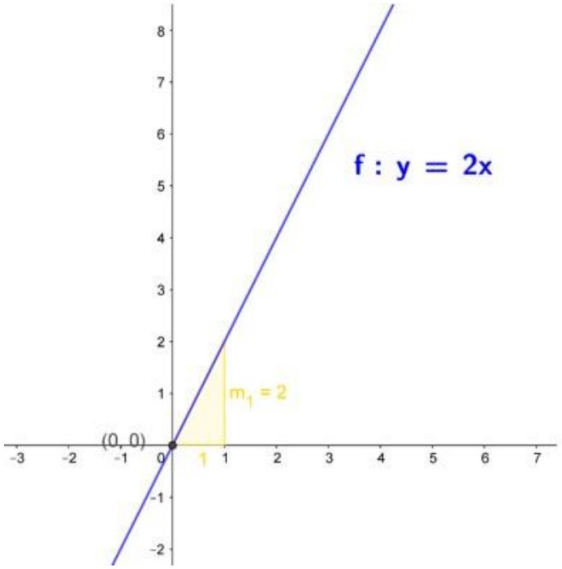
dove b è un numero reale che indica di quanto traslare la retta verticalmente.

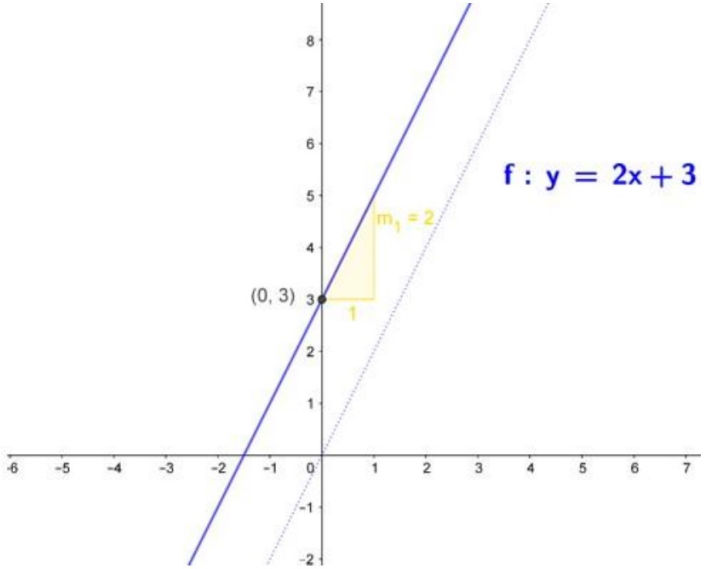
- In sintesi, per costruire una retta generica, possiamo prendere una retta per l'origine (*y = mx*) e traslarla verticalmente aggiungendo un termine costante *b (y= mx + b)*.

Retta generica

- Per esempio, prendiamo la retta data dalla funzione $f(x) = 2x$.
- Questa funzione lineare associa a $x = 1$, $y = 2 \cdot 1 = 2$.
- Se trasliamo questa retta di 3 unità (cioè sommiamo la funzione $f(x)$ alla funzione costante $g(x) = 3$), otteniamo una nuova funzione $h(x) = 2x + 3$ che associa a $x = 1$, non più $y = 2$, ma $y = 2 \cdot 1 + 3 = 5$.

Retta generica





La retta y = mx + q ha allora la stessa pendenza di y = mx ma è traslata di q. Il numero q si chiama **intercetta** perchè il punto in cui la retta intercetta l'asse delle y è il punto di coordinate (0, q).

Retta per 2 punti

In generale, il metodo per trovare la retta per due punti consiste nel:

- **<u>Trovare il coefficiente angolare</u>** come $m = \frac{\Delta}{\Delta x} = \frac{yB-yA}{xB-xA}$.

Importante: seguire sempre lo stesso ordine negli incrementi, cioè se si calcola xB – xA si dovrà procedere con yB – yA .

- **<u>Trovare l'intercetta q</u>** sostituendo le coordinate di uno dei punti *(xA, yA) o (xB,yB)* all'equazione $y = mx + q$, in cui si è già sostituito il valore di m, appena trovato:

$$q=yA-mxA \quad o \quad q=yB-mxB$$

Retta per 2 punti

Più in generale, l'equazione della retta passante per 2 punti A e B può essere calcolata come segue:

$$\frac{x-xA}{xB-xA} = \frac{y-yA}{yB-yA}$$

Sostituendo a x_A, x_B, y_A e y_B le coordinate dei 2 punti.

Esempio di retta per 2 punti

Scrivere l'equazione della retta passante per i punti: A=(2,1) e B=(5,7).

Applicando la formula: $\frac{x-xA}{xB-xA} = \frac{y-yA}{yB-yA}$, si ottiene: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{7-1}$

Semplifichiamo l'espressione $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{6}$

Moltiplichiamo entrambi i lati per 3 per eliminare il denominatore: $2(x-2) = (y-1)$

Espandiamo i prodotti: 2x−4=y−1

Portiamo y a sinistra e costanti a destra per ottenere l'equazione nella forma standard: 2x−y=3

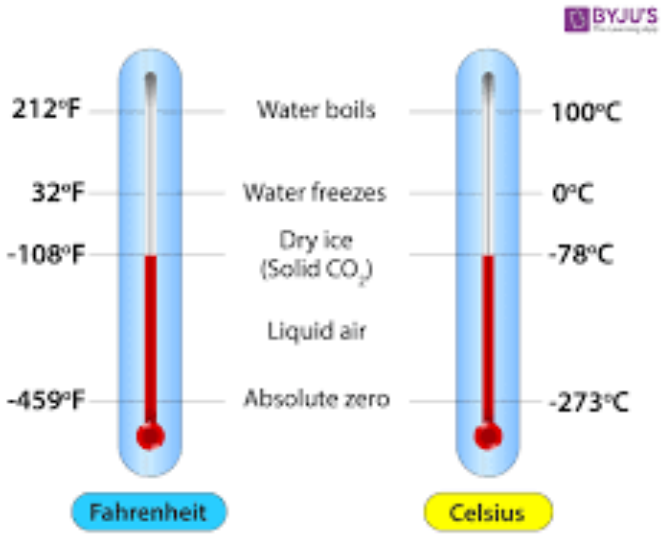
Isoliamo la y sul lato sinistro della equazione: 2x−y = 3

Spostiamo 2x al lato destro dell'equazione: **y = 2x −3**

Esempio di retta per 2 punti

Il grado Celsius divide in 100 intervalli uguali la differenza di temperatura tra il punto di ebollizione dell'acqua, posto a 100 °C, e il punto di congelamento, posto a 0 °C, alla pressione atmosferica standard.

Il grado Fahrenheit è invece definito ponendo a 32 °F la temperatura di congelamento e a 212 °F quella di ebollizione dell'acqua.



Esempio di retta per 2 punti

Scriviamo la legge lineare che permette di convertire una scala nell'altra.

Utilizziamo la $\frac{x-xA}{xB-xA} = \frac{y-yA}{yB-yA'}$

con x = C (temperatura espressa in Celsius) e y = F (temperatura espressa in Fahrenheit), considerando come primo punto quello di congelamento dell'acqua e come secondo quello di ebollizione.

Si ottiene:

$$\frac{C-0}{100-0} = \frac{F-32}{212-32}$$

$$F=32+\frac{9}{5}C=32+1.8C$$

Il coefficiente è 1.8, cioè ogni grado Celsius corrisponde a 1.8 gradi Fahrenheit.

Funzioni quadratiche

Le funzioni quadratiche, in cui la x compare di secondo grado sono del tipo:

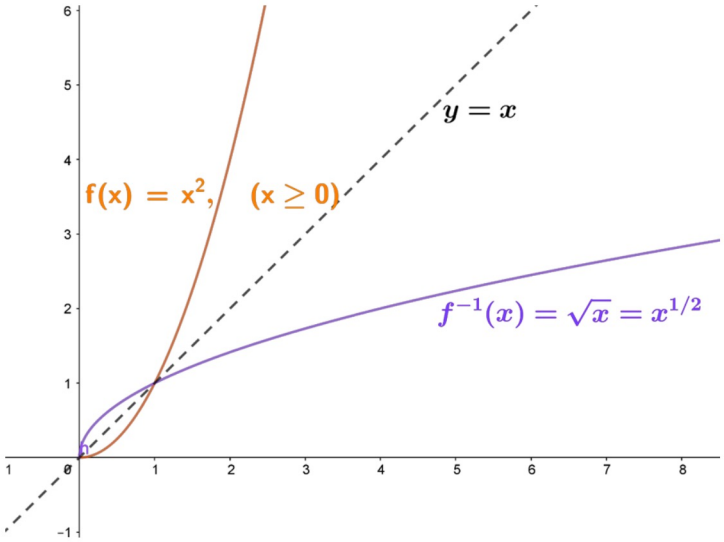
$$\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c} \text{ oppure } \mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

e si possono rappresentare nel piano cartesiano come parabole con asse parallelo all'asse delle y, che può essere orientata verso l'alto o verso il basso a seconda del segno di a.

Funzione radice

La funzione $y=x^2$ non si può invertire perchè non è iniettiva, ma la sua restrizione a $[0, +\infty[$

Si può invertire e la sua inversa è la funzione radice $y=\sqrt{x}$



Parabola con vertice nell'origine

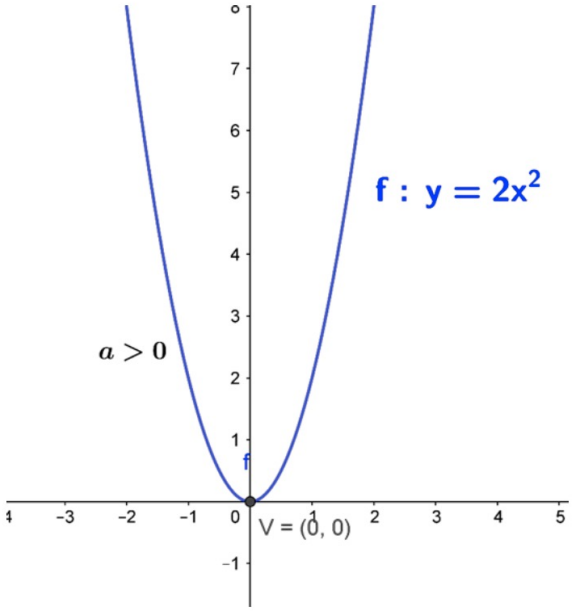
- La più semplice funzione quadratica è la funzione potenza del tipo $\mathbf{y = ax^2}$, con **a** numero reale diverso da 0.
- Si tratta di una parabola con asse di simmetria l'asse y, quindi è una funzione pari, cioè

$$\mathbf{f(-x) = f(x).}$$

- Essa ha vertice nell'origine del sistema cartesiano e il numero **a** rappresenta l'apertura della parabola.

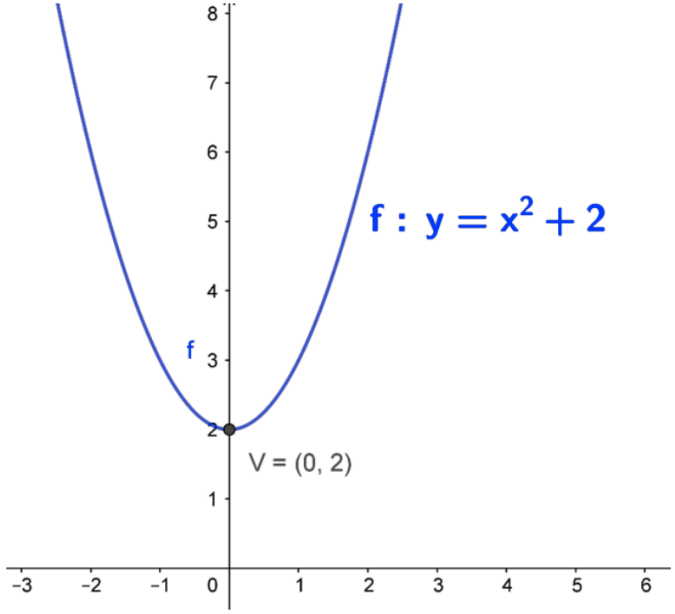
Parabola con vertice nell'origine

- a > 0: la parabola rivolge la concavità verso l'alto;
- a = 0: la parabola degenera in una retta (l'asse x in questo caso);
- a < 0: la parabola rivolge la concavità verso il basso.



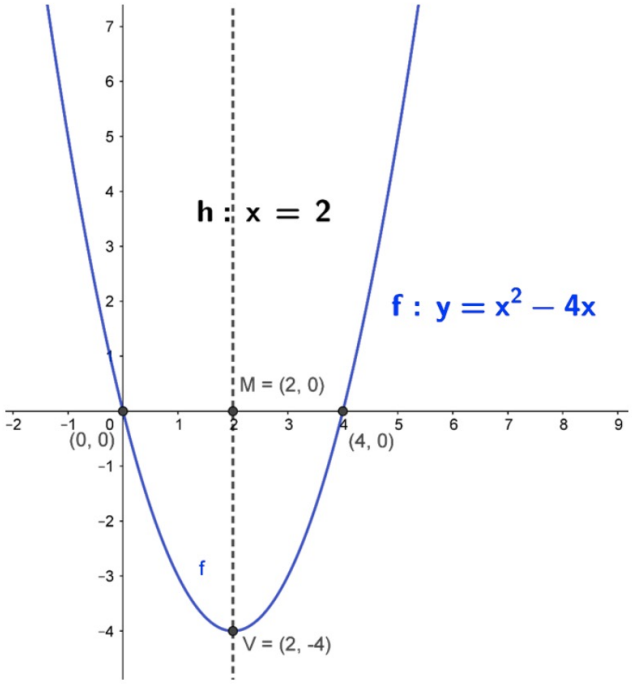
Parabola con asse Y

- La funzione quadratica del tipo $\mathbf{y = ax^2 + c}$ è la somma della funzione $\mathbf{y = ax^2}$ e della costante **c**, pertanto è la parabola $\mathbf{y = ax^2}$ **traslata di c**.
- L'asse di simmetria rimane l'asse y, come nel caso della parabola con vertice in O, ma il vertice da (0,0) diventa il punto V ≡ (0,c).
- **a** rappresenta sempre l'apertura della parabola e il segno di **a** ci da la concavità, come nel caso di ax^2.



Parabola con asse verticale

- La funzione quadratica del tipo **$y = ax^2 + bx$** incontra l'asse x nei due punti (0,0) e $(-b/a\ ,\ 0)$, infatti: $ax^2 + bx = x \cdot (ax + b) = 0$ per $x = 0$ e per $x = -b/a$
- Allora l'asse di simmetria, che è parallelo all'asse y, passa per il punto medio tra (0,0) e $(-b/a\ ,0)$, che è $(-b/2a\ ,\ 0)$.
- L'asse di simmetria ha allora equazione $x = -b/2a$
- E il vertice ha come ascissa $x_V = -b/2a$.
- L'ordinata di V può essere calcolata come $y\ (x_V)$.



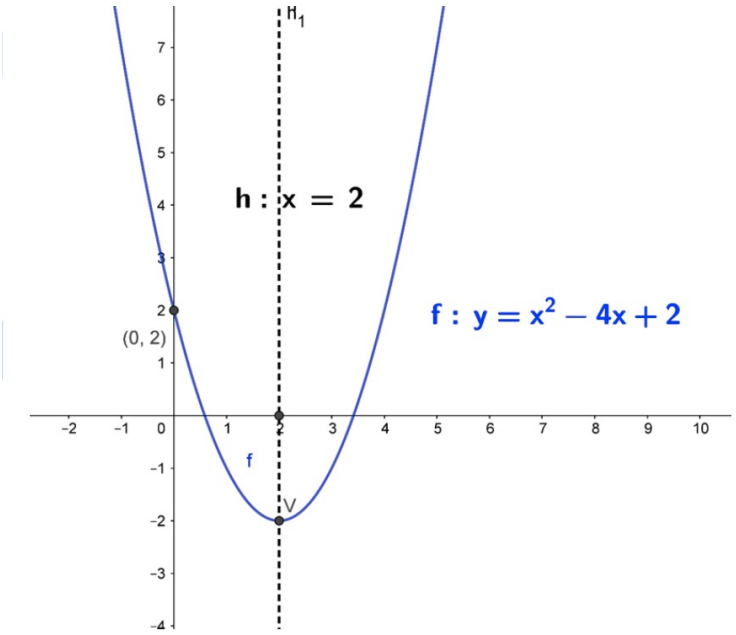
Parabola generica

- La funzione quadratica del tipo **$y = ax^2 + bx + c$** è la somma della funzione **$y = ax^2 + bx$** e della costante **c**, pertanto è la parabola **$y = ax^2 + bx$ traslata di c**.
- L'asse di simmetria e l'ascissa del vertice non cambiano rispetto a $y = ax^2 + bx$.
- Allora la parabola generica con asse verticale, dall'equazione $y = ax^2 + bx + c$, ha:

  Asse di simmetria $x = -b/2a$

  Ascissa del vertice $x_V = -b/2a$.

  Ordinata del vertice da calcolare come $y(x_V)$.
- Notiamo, infine, che **c rappresenta l'intercetta**.



Esempio

Rappresentiamo la funzione $y = x^2 - x - 6$.

Si tratta di una parabola con asse parallelo all'asse y. Il suo asse di simmetria ha equazione $x = -b/2a = -(-1)/2*1 = 1/2$.

L'ascissa del suo vertice è allora $x_V = 1/2$, l'ordinata del vertice è $y(x_V) = (1/2)^2 - (1/2) - 6 = -25/4$.

L'intercetta è -6, quindi la parabola passa dal punto $(0,-6)$.

Troviamo i punti in cui la parabola interseca l'asse x, così da trovare gli intervalli in cui la parabola risulta positiva (cioè sopra l'asse x) e quelli in cui risulta negativa (cioè sotto l'asse x).

Per trovare i punti in cui la parabola interseca l'asse x risolviamo l'equazione di secondo grado

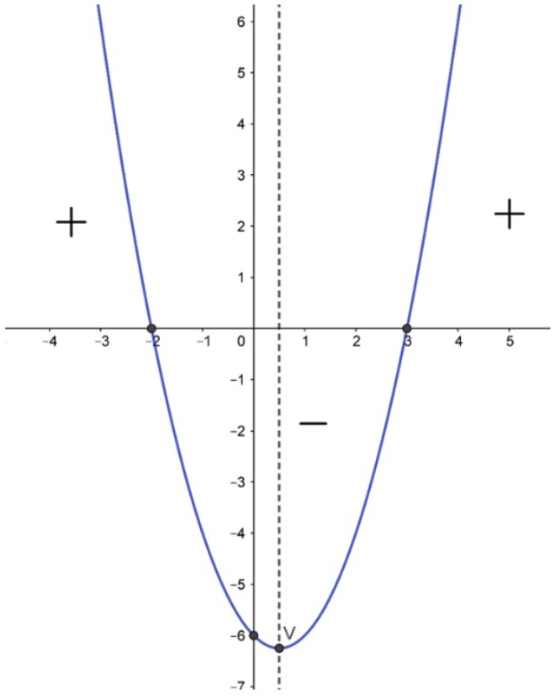
$x^2 - x - 6 = 0$, in cui $a = 1$; $b = -1$; $c = -6$.

Esempio

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \longrightarrow x_1 = 3, x_2 = -2.$$

Poichè a>0, la parabola volge la concavità verso l'alto, quindi sarà positiva prima di -2 e dopo 3, e negativa tra -2 e 3.

Esempio



Le funzioni quadratiche servono a rappresentare delle superfici tridimensionali.

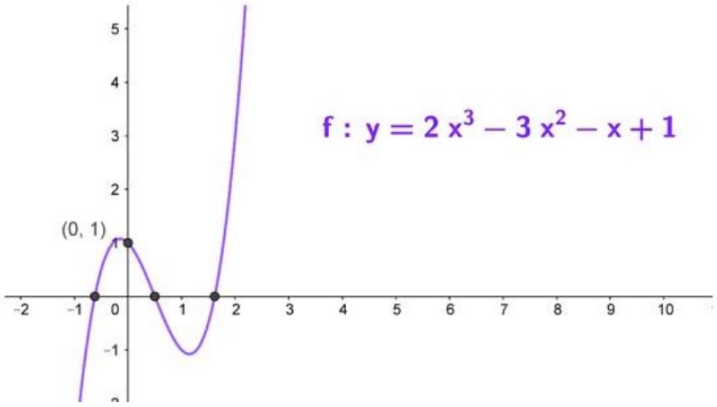
La forma generale di una funzione quadratica in due variabili è:

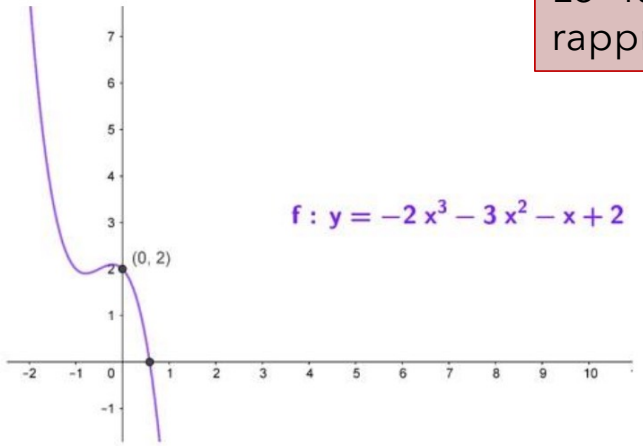
$$z=ax^2+by^2+cx+dy+ez=ax^2+by^2+cx+dy+e$$

Funzioni cubiche

- In generale una **funzione cubica** ha una espressione del tipo **$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$**.
- Una funzione cubica ha tratti crescenti e tratti decrescenti. Le sue intersezioni con l'asse x possono essere 3. L'intersezione con l'asse y è il punto (0, d).

Le funzioni cubiche servono a rappresentare dei volumi

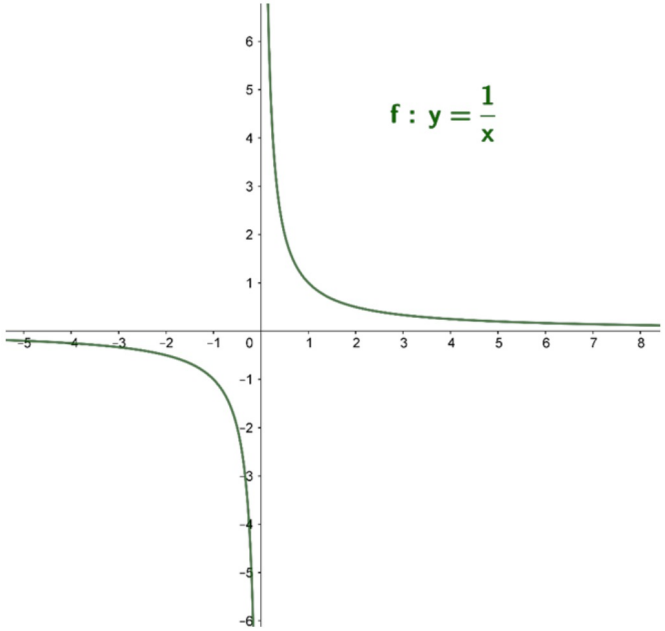




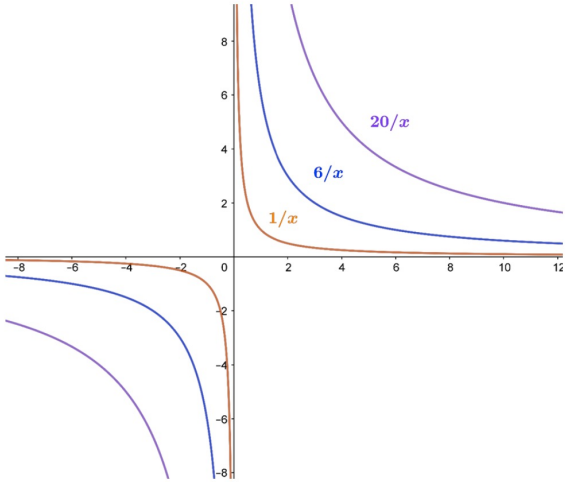
Iperbole equilatera

- L'iperbole equilatera riferita agli asintoti, è rappresentata dalla funzione $f(x) = \frac{1}{x}$, il cui Dominio esclude dall'insieme dei numeri reali il solo x=0, dato che non si può dividere per 0.
- Si tratta di una funzione dispari, cioè il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine, poichè f(-x) = -f(x).
- Si tratta di una funzione decrescente in senso stretto perchè se $x_1<x_2$ allora $1/x_1>1/x_2$
- Per valori di x molto grandi la y tende ad assumere valori molto piccoli, perchè dividendo per numeri grandi, y tende a zero.
- Viceversa per valori di x molto piccoli, cioè vicini a zero, la y tende ad assumere valori molto grandi, perchè dividendo per numeri piccoli, y tende a infinito.

Iperbole equilatera



Anche una funzione del tipo f(x) = $\frac{a}{x}$ è un'iperbole equilatera riferita agli asintoti. Il numero a rappresenta **l'apertura dell'iperbole**.

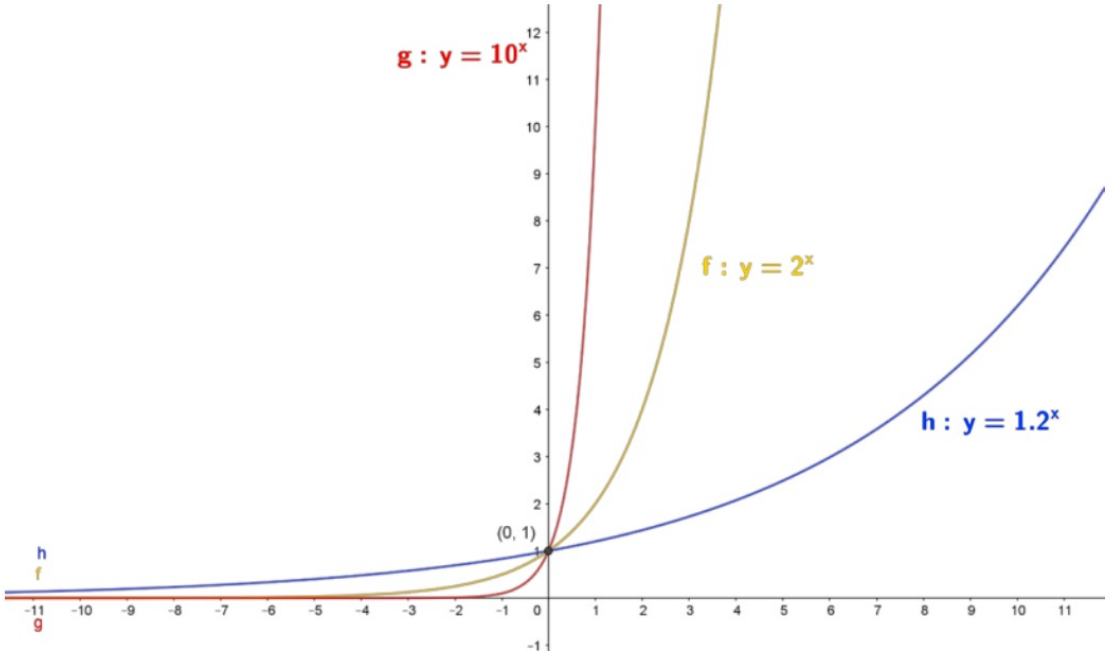


Le iperboli equilatere servono a rappresentare fenomi con proporzionalità inversa

Funzioni esponenziali

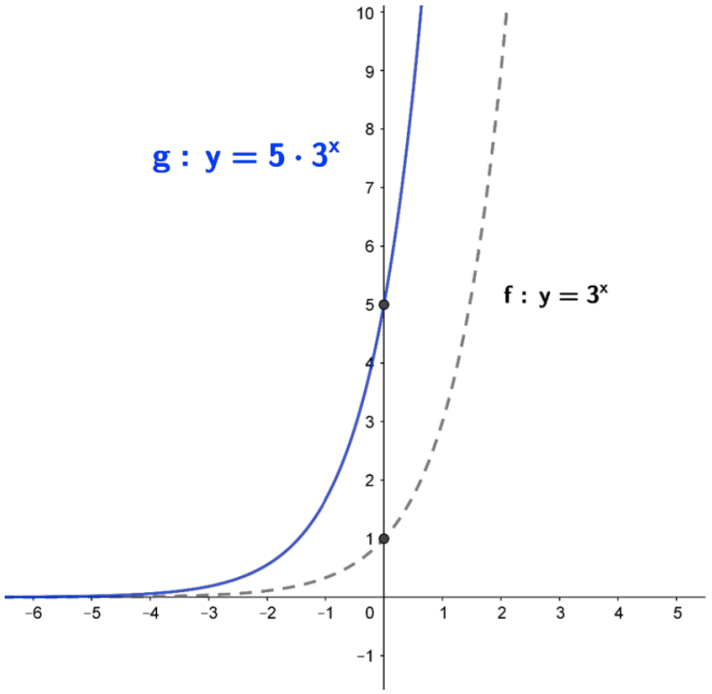
- Una funzione esponenziale è del tipo $f(x) = a^x$, dove la base a si suppone sempre positiva.
- Se $a = 1$, la funzione diventa costante $f(x) = 1$.
- Se $a > 1$, la funzione è strettamente crescente.
- Proviamo a rappresentarla graficamente, considerando per esempio $a = 2$:
- In x = 0, abbiamo $f(0) = a^0 = 1$ qualunque sia il valore di a.
- Per x positive, $f(x)$ sarà sempre maggiore di 1. Al crescere di x la $f(x)$ cresce molto.
- Per x negative, $f(x)$ sarà sempre minore di 1. Al decrescere di x, cioè per valori che tendono a -∞, la $f(x)$ tenderà ad assumere valori sempre più vicini allo zero.

Funzioni esponenziali



Funzioni esponenziali

Funzioni esponenziali del tipo $f(x) = b \cdot a^x$ hanno un andamento simile ad a^x ma invece di passare per il punto (0,1), passano per il punto (0,b).



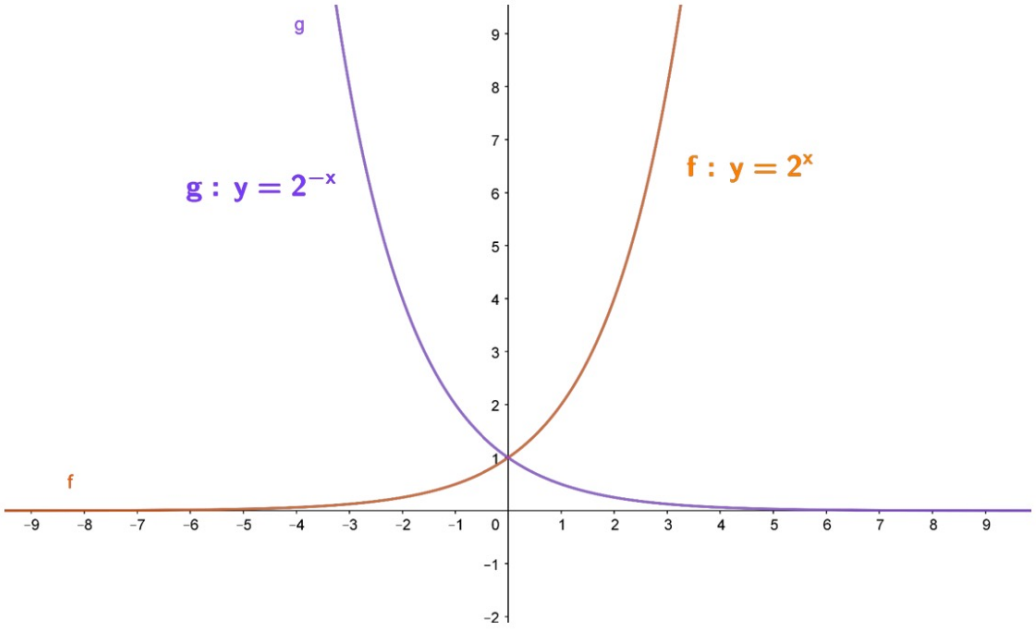
Le funzioni esponenziali servono a rappresentare quei fenomeni caratterizzati da crescita/decrescita esponenziale

Il numero *e*

- L'andamento di funzioni esponenziali crescenti (per a > 1) è quindi sempre sostanzialmente lo stesso.
- Le basi maggiori di 1 più utilizzate sono 2, 10, *e*. Il numero *e* = 2,71828… è un numero irrazionale (quindi con infinite cifre decimali), detto **Numero di Nepero** o **Numero di Eulero**, e riveste in matematica un ruolo molto importante.
- Il numero *e* = 2.718281828459045235 36... che possiamo approssimare a *e* ≈ 2.72, ci consente di esprimere tutti i numeri positivi con esponenti ragionevoli (cioè nè eccessivamente grandi nè eccessivamente piccoli).

Segno dell'esponente

- Si noti che cambiando segno all'esponente di una funzione esponenziale, la funzione cambia completamente il suo andamento.
- Infatti, se, per esempio, $f(x) = 2^x$ è una funzione esponenziale crescente, siccome $2^{-x} = (1/2)^x$, la funzione $g(x) = 2^{-x}$ è esponenziale decrescente.



Esempi di funzioni esponenziali – crescita batterica (I)

Il batteri si riproducono per duplicazione (scissione binaria): ogni batterio produce una copia di sé. Possiamo quindi costruire un modello per descrivere come varia la numerosità della popolazione nel tempo.

Assumendo per semplicità che tutte le duplicazioni dei batteri avvengano nello stesso istante, indichiamo con N_k la numerosità alla k-esima generazione di batteri (dopo k duplicazioni) e con N_{k-1} quella della (k−1)-esima. Poiché ad ogni generazione la popolazione raddoppia, vale la relazione:

$$N_k = 2N_{k-1} \quad (1)$$

Indichiamo la generazione iniziale come quella corrispondente a k=0 e supponiamo che sia $N_0 = 1$ (cioè inizialmente la popolazione è formata da un solo batterio). I valori di numerosità nelle generazioni successive si calcolano facilmente utilizzando la legge(1) , che dà:

$$N_1 = 1$$

$$N_2 = 2\,N_1 = 2 \text{ x} 2 = 4$$
$$N_3 = 2N_2 = 2\,x\,4 = 8$$

E in generale:

$$N_k = 2^k \qquad (2)$$

Esempi di funzioni esponenziali – crescita batterica (I)

Mostriamo ora come cambia la legge (2) se N_0 , il numero iniziale di batteri, assume un valore qualunque. Visto che la numerosità raddoppia, a ogni generazione si ha:

$$N_1 = 2N_0$$

$$N_2 = 2\,N_1 = \ 4\,N_0$$

$$N_3 = 2N_2 = 4N_1 = 8\,N_0 \ (= 2^3\,N_0)$$

E in generale : $N_k = 2^k\,N_0$

Se ad esempio N_0 = 10, allora $N_1 = \ 2^1\,x\,10 = 10$, $N_2 = \ 2^2\,x\,10 = 40$, $N_3 = \ 2^3\,x\,10 = 80$ e così via.

Esempi di funzioni esponenziali – crescita batterica (II)

Supponiamo di aver fissato un'unità di misura per il tempo (es. l'ora), e sia N(t) il numero di batteri al tempo t, con t numero reale positivo. Il valore N(t) deve essere pari al numero di batteri al tempo precedente N(t - 1), aumentato del numero di batteri che si sono duplicati in un'ora.

L'aumento è proporzionale al numero di batteri presenti, quindi deve esistere una costante $q > 0$, tale che:

$$N(t) = N(t - 1) + qN(t - 1) = RN(t - 1), \qquad \text{con } R := 1 + q \quad (4)$$

Supponiamo che all'inizio di un esperimento si abbiano N(0) = 1000 batteri, e che nell'ora successiva se ne generino altri 400 per duplicazione; si ha N(1) = 1000+400 = (1 + q) N(0), dunque q = 400/1000 = 2/5 = 0.4 e R = 1 + q = 1.4. Se, nel tempo, il valore di q rimane costante, possiamo anche prevedere che

N(1) = 1400

$N(2) = 1400(1 + 2/5) = 1000(1 + 2/5)^2 = 1960$

$N(3) = 1960(1 + 2/5) = 1000(1 + 2/5)^3 = 2744$

e così via.

Esempi di funzioni esponenziali – crescita batterica (II)

La (4) modellizza un fenomeno di crescita della popolazione, e infatti la costante q è maggiore di 0 e quindi R = 1 + a > 1, in modo che N(t) > N(t - 1).

Questa legge ha la stesa natura della (1) descritta prima e permette di calcolare la numerosità al tempo t in termini della numerosità iniziale N_0 = N(0):

$$\mathbf{N(t)= } R^t N_0 \qquad \mathbf{(5)}$$

Anche in questa variante del modello abbiamo ottenuto una legge esponenziale. La legge (5) è più vicina alla realtà della legge (3), perché è stata ottenuta sotto ipotesi meno restrittive.

Essa inoltre ha il vantaggio di essere valida per un qualsiasi valore del tempo t ≥ 0, mentre la legge (3), in accordo con il modello di duplicazioni sincrone, permette di esprimere N_k solo per k intero.

Esempi di funzioni esponenziali – decrescita esponenziale

Supponiamo che a un paziente sia somministrato un certo **farmaco**, per via endovenosa, in un'unica dose. Mano a mano che il farmaco viene assorbito dall'organismo, la concentrazione del farmaco nel sangue diminuirà nel tempo. La concentrazione segue una legge:

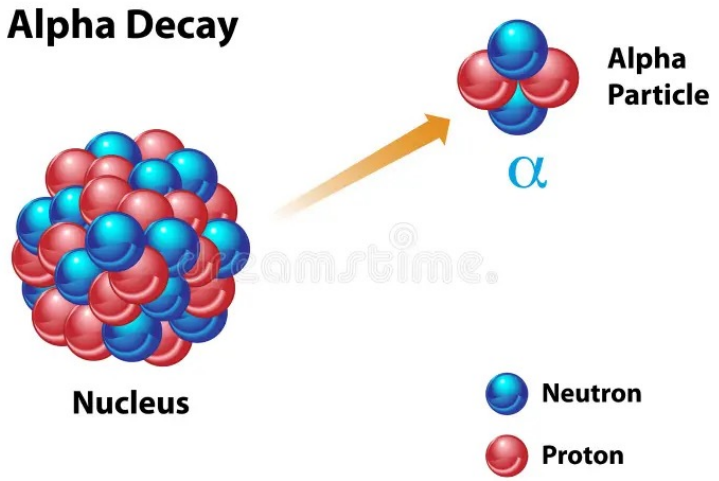
$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$

dove C_0 è la concentrazione iniziale e k una costante positiva, cioè C (t) segue una decrescita esponenziale.

Esempi di funzioni esponenziali – decadimento radioattivo

Le proprietà chimiche che caratterizzano un elemento dipendono dagli elettroni, il cui numero in un atomo neutro è pari al numero atomico, cioè al numero di protoni nel nucleo. Nel nucleo sono presenti anche neutroni e, a seconda del loro numero, si individuano varianti dell'elemento, dette isotopi. Molti isotopi, definiti radioattivi, sono instabili, perché il nucleo è soggetto a trasformazioni che avvengono spontaneamente mediante emissione di particelle.

Per descrivere quantitativamente questo fenomeno, consideriamo al tempo t la massa M(t) di un isotopo radioattivo. Al tempo t + 1 la massa sarà diminuita, perché parte degli atomi dell'isotopo si saranno trasformati in atomi di un altro elemento. In accordo con le leggi della fisica nucleare, questa diminuzione è proporzionale alla massa presente.



Esempi di funzioni esponenziali – decadimento radioattivo

Questa affermazione si descrive matematicamente dicendo che esiste una costante q, con $0 < q < 1$, tale che:

$M(t + 1) = M(t) - qM(t) = rM(t)$, con $r := 1 - q$ (6)

vale a dire che la massa M al tempo $t + 1$ è pari alla massa al tempo t, diminuita di una quantità proporzionale alla massa stessa. Risulta $0 < r < 1$, e questo è corretto, perché stiamo modellizzando la decrescita della massa atomica M(t) e quindi deve essere $M(t+ 1) < M(t)$.

Procedendo come per l'espressione analoga (4), si può esprimere M(t) in termini della massa all'istante iniziale M_0:

$$M(t) = r^t M_0. \quad (7)$$

e si ottiene ancora una legge esponenziale.

Logaritmi e funzioni logaritmiche

- In generale, dati due numeri positivi a ≠ 1, detta **base**, e b, detto **argomento**, il **logaritmo in base a di b è l'esponente da dare ad a per ottenere b.**
- Ad esempio, $\log_3(9) = 2$, perchè $3^2 = 9$.
- Notiamo che il logaritmo $\log_a(b)$ è un numero negativo se: $a>1$ e $0<b<1$ oppure se $0<a<1$ e $b>1$. Infatti quando l'esponente di una potenza è negativo, da una base maggiore di 1 si passa a una frazione minore di 1 e viceversa, da una frazione minore di 1 si passa a un numero maggiore di 1.
- Il logaritmo $\log_a(b)$ è un numero positivo se a e b (che, ricordiamo, sono positivi) sono entrambi maggiori o entrambi minori di 1.
- Nota, in particolare, che l'esponente (quindi il logaritmo) è zero quando l'argomento è 1. Quindi qualunque sia a, $\log_a(1) = 0$.

Proprietà dei logaritmi

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
   cioè il logaritmo del prodotto è uguale alla somma dei logaritmi;
2. $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$
   cioè il logaritmo del quoziente è uguale alla differenza dei logaritmi;
3. $\log_a(x^p) = p \cdot \log_a x$
   cioè l'esponente di x elevato a p è uguale a p volte il logaritmo di x.
4. Inoltre, vale la formula del Cambiamento di base:

$$\log_a b = \frac{\log_c}{\log_c}, \text{ con } c>0$$

Proprietà dei logaritmi

Le basi più usate per i logaritmi sono la base 10 e la base *e*.

Per esse esiste una notazione specifica:

- **$\log x = \log_{10} x$**, cioè quando non si esprime la base si intende che sia 10.
- **$\ln x = \log_{e} x$**, cioè quando si scrive *ln*, **logaritmo naturale**, si intende che la base sia *e*.

Esercizi

- **Calcoliamo il $\log_4(128)$.**

- Purtroppo 128 non è potenza di 4 (cioè non esiste un numero intero n tale che $4^n = 128$), ma poichè sia 4 che 128 sono potenze di 2, conviene usare la formula del cambiamento di base: $\log_a b = \frac{\log_c}{\log_c}$, scegliendo la base 2. Si ha: $\log_4 128 = \frac{\log_2 128}{\log_2 4} = 7/2$.

- **Calcoliamo $\log_2(5) + \log_2(6) - \log_2(15)$.**

- Applicando le proprietà 1. e 2. si ottiene:

  $\log_2(5) + \log_2(6) - \log_2(15) = \log_2(30/15) =$ **$\log_2(2) = 1$**.

Esercizi

- **Calcoliamo $\log_2(5) + \log_2(6) - \log_2(15)$.**

1. Iniziamo con $\log_2(5) + \log_2(6)$:

   utilizzando la proprietà del prodotto dei logaritmi, possiamo combinare questi due logaritmi in un unico logaritmo: $\log_2(5 * 6)$.

2. Ottenuto $\log_2(5 * 6) - \log_2(15)$

   tramite la proprietà del quoziente dei logaritmi, possiamo scrivere questa espressione come un unico logaritmo: $\log_2((5 * 6) / 15)$.

3. Semplifichiamo il logaritmo all'interno del logaritmo:

   $5 * 6$ è uguale a 30, quindi hai: $\log_2(30 / 15)$.

4. Continuiamo a semplificare:

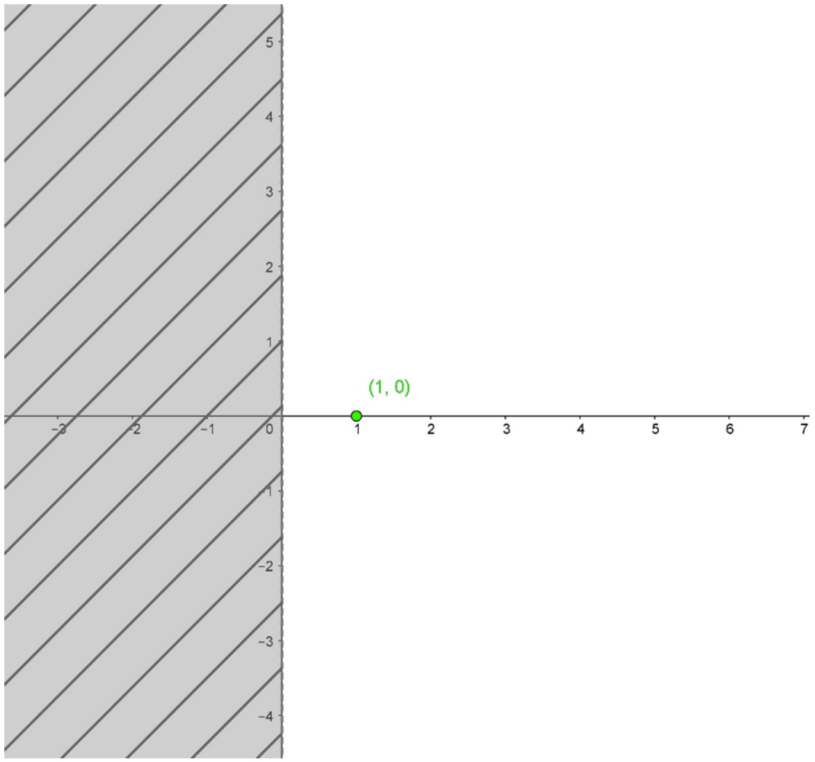
   30 diviso per 15 è uguale a 2: $\log_2(2)$ che è = 1.

Funzione logaritmo

- La funzione $f(x) = \log_a(x)$ oppure $y = \log_a(x)$, con $a > 0$ e $a \neq 1$ è una funzione che associa ad ogni x del Dominio il logaritmo in base a di x.
- Quindi, ad esempio, se a = 2, la funzione $f(x) = \log_2(x)$ associa ad ogni x l'esponente da dare a 2 per ottenere x.
- Per rappresentare graficamente la funzione $f(x) = \log_a(x)$ osserviamo prima di tutto che qualunque sia a, l'argomento di un logaritmo è necessariamente un numero positivo, perchè elevando a una certa potenza un numero positivo (la base a) si ottiene sempre un numero positivo.
- Quindi il **Dominio** della funzione $f(x) = \log_a(x)$ è **R+**.
- Inoltre si ha che qualunque sia a, $f(1) = \log_a(1) = 0$ poichè ogni numero "a" elevato a zero fa 1.

Funzione logaritmo

Tutte le funzioni logaritmo del tipo $\log_a(x)$, qualunque sia a, si rappresentano graficamente su un grafico cartesiano nel semipiano delle x positive, e passano tutte dal punto (1,0).

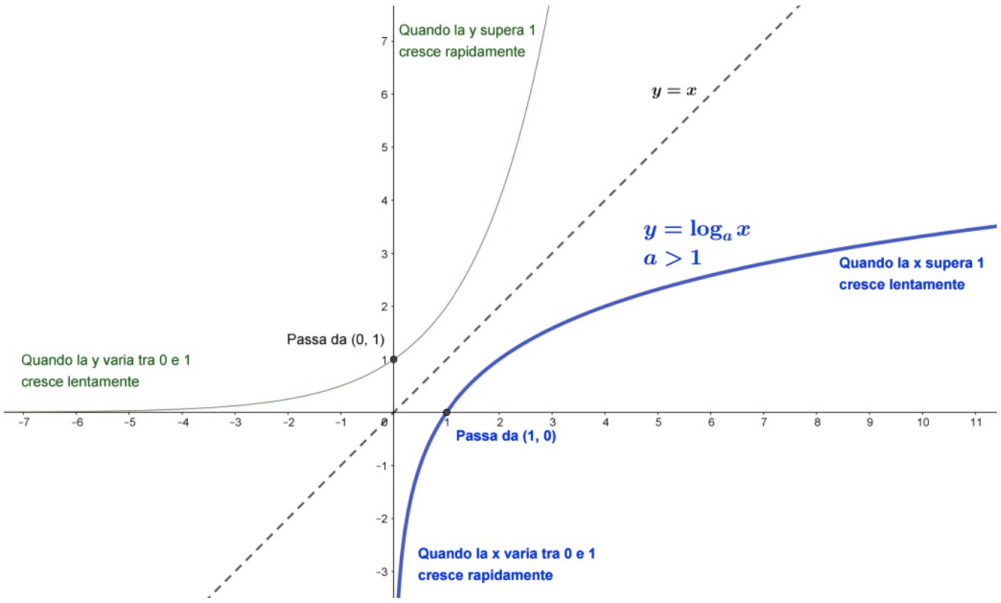


Funzione logaritmo

- Dato che il logaritmo è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza, **la funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale**, e quindi il suo grafico sarà semplicemente il simmetrico del grafico di una funzione esponenziale rispetto alla retta **y = x**.
- A livello grafico, in sostanza basterà scambiare il ruolo della x con quello della y.

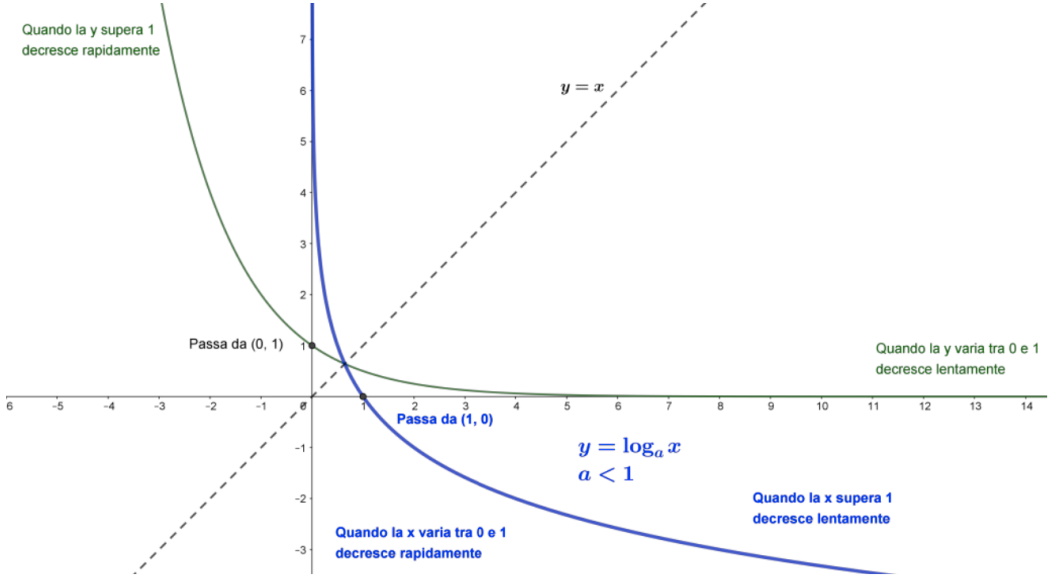
Funzione logaritmo

Ecco il grafico della funzione $f(x) = \log_a(x)$ quando $a > 1$ (per esempio $\log_2(x)$):



Funzione logaritmo

Ecco il grafico della funzione $f(x) = \log_a(x)$ quando $a<1$ (per esempio $\log_{1/2}(x)$):



La funzione logaritmo

In ogni caso la funzione logaritmo:

- varia sempre rapidamente per x che varia tra 0 e 1

  (cresce rapidamente se a > 1, decresce rapidamente se a < 1);
- per x = 1, vale sempre 0, quindi passa da (1,0);
- varia sempre lentamente quando x supera 1

  (cresce lentamente se a > 1, decresce lentamente se a < 1).

Le funzioni logaritmiche servono a modellizzare quei fenomeni che inizialmente hanno una crescita importante, ma che col passare del tempo crescono molto lentamente.

Esempio di funzione logaritmo

- **Diffusione di un’epidemia:** Il numero di persone infettate in un'epidemia, fintanto che non viene messo in atto nessun provvedimento di contrasto, può crescere nel tempo in modo esponenziale. Ogni persona infetta incontra e, con una certa probabilità, infetta altre persone ad ogni fissato intervallo di tempo. Se ogni infetto prima di guarire infetta altre p persone con p › 1, la crescita nel tempo della popolazione degli infetti sarà di tipo esponenziale.
- **Dinamica di una popolazione**: Il numero di individui di una certa popolazione animale isolata, fintanto che le risorse di cibo non mancano, non vi sono meccanismi né di predazione né di competizione, può crescere nel tempo secondo una legge esponenziale.

Esempio di funzione logaritmo

- **Legge di raffreddamento di Newton:**

Dalle osservazioni sperimentali si ricava che un corpo caldo, posto a contatto con una grande quantità d'acqua a temperatura inferiore a quella del corpo, si raffredda fino a giungere alla temperatura dell'acqua stessa. La differenza di temperatura si riduce esponenzialmente nel tempo. Se T_{H2O} è la temperatura dell'acqua e T_0 è la temperatura che ha l'oggetto prima dell'immersione nell'acqua, la legge di raffreddamento è data da

T(t) - T_{H2O} = (T_0 - T_{H2O})e^{-at}, da cui T() = T_{H2O} + (T_0 - T_{H2O}) e^{-at}

Per sapere, in particolare, in quanto tempo la differenza di temperatura si dimezza, basta risolvere l'equazione

(T(t) - T_{H2O}) = + (T_0 - T_{H2O}) /2, cioè e^{-at} = 1/2

che ha soluzione t = (log 2) /a.

NB: questa legge non si applica solo a corpi immersi in acqua, ma a qualunque corpo a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante.

Esempio di funzione logaritmo – il pH

Quando si sciolgono alcune sostanze in soluzione acquosa (acidi, basi o sali) si determina un rilascio o un assorbimento di ioni idrogeno (H_3O+). La concentrazione di questi ioni nella soluzione permette di quantificare il grado di acidità o di alcalinità. Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25 °C, nella quale si hanno $10^{-7} mol\ l^{-1}$ di ioni H_3O+.

Una concentrazione alta di ioni, compresa tra 10^{-2} e 10^{-7} , si riscontra nelle cosiddette soluzioni "acide", mentre se la concentrazione è al di sotto di 10^{-7}, la soluzione è "basica», se è esattamente uguale a 10^{-7} è detta "neutra".

Vista la grande variabilità dei valori di concentrazione, è conveniente utilizzare come misura l'esponente della concentrazione. Si definisce pH il numero

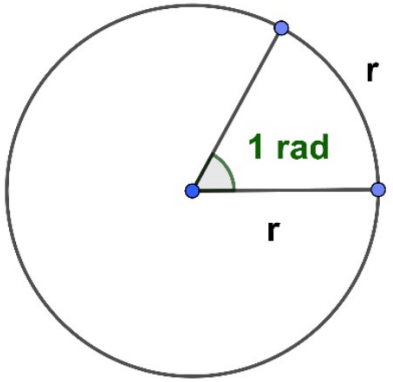
$$\text{pH} = -\log[H_3O+]$$

dove $[H_3O+]$ è la concentrazione di ioni H_3O+ . Da questa definizione segue che il pH delle soluzioni acide è minore di 7, quello delle soluzioni neutre è pari a 7, quello delle alcaline è maggiore di 7.

Il pH della pioggia è 6.5 e quello del sangue è 7.4; questi valori differiscono di poco meno di una unità ma, se consideriamo la definizione, scopriamo che si ha, rispettiva la concentrazione di ioni idrogeno nell'acqua piovana è circa 8 volte quella del sangue.

Goniometria e funzioni goniometriche

- La goniometria è lo studio degli angoli.
- Di solito gli angoli si misurano in gradi, ma in goniometria come unità di misura si preferisce usare **il radiante**.
- L'uso del radiante agevola moltissimo i calcoli con gli angoli, al contrario l'uso di multipli e sottomultipli del grado li complica moltissimo.
- Se consideriamo una circonferenza di raggio r, si definisce radiante l'angolo al centro che insiste su un arco di lunghezza uguale al raggio r:



Radianti

- Un angolo α misurato in radianti si definisce come il rapporto tra la lunghezza dell'arco su cui insiste l'angolo α e il raggio della circonferenza.
- Formule di conversione tra gradi e radianti:

$$\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°}\,\alpha_{\circ}, \qquad \alpha_{\circ} = \frac{180°}{\pi}\,\alpha_{rad}$$

Esercizi

- **Trasformiamo l'unità di misura di un angolo di 30° da gradi a radianti**.

  Abbiamo $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°} 30° = \frac{\pi}{6}$

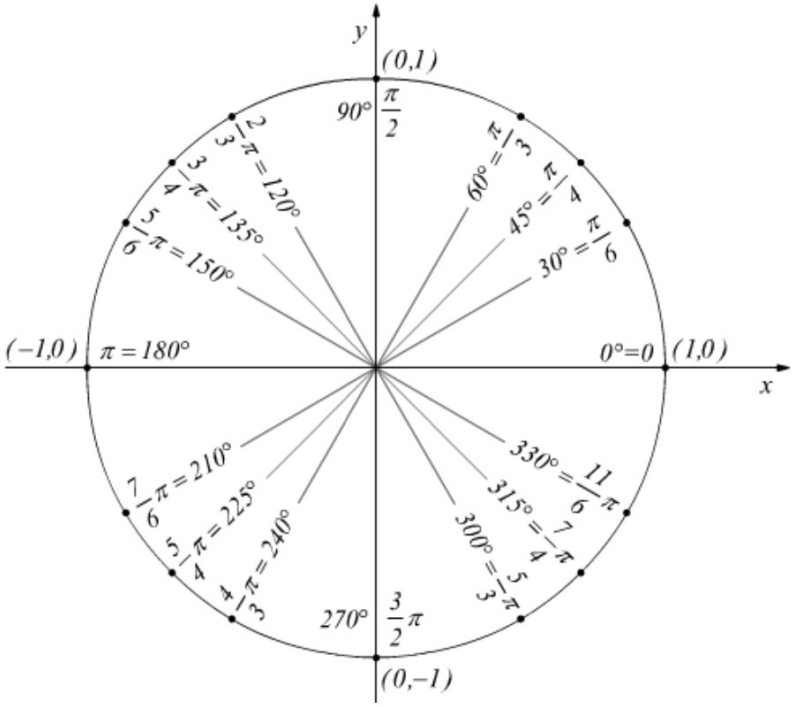
- **Calcoliamo la lunghezza dell'arco che insiste su un angolo α di 60° in una circonferenza di raggio r=3.**

- Poichè l'angolo in radianti è $\alpha_{rad} = \frac{\pi}{180°} 60°$, e si ha che $\alpha = \frac{l}{r}$, abbiamo $l = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 3 = \pi$

  (quindi circa 3.14).

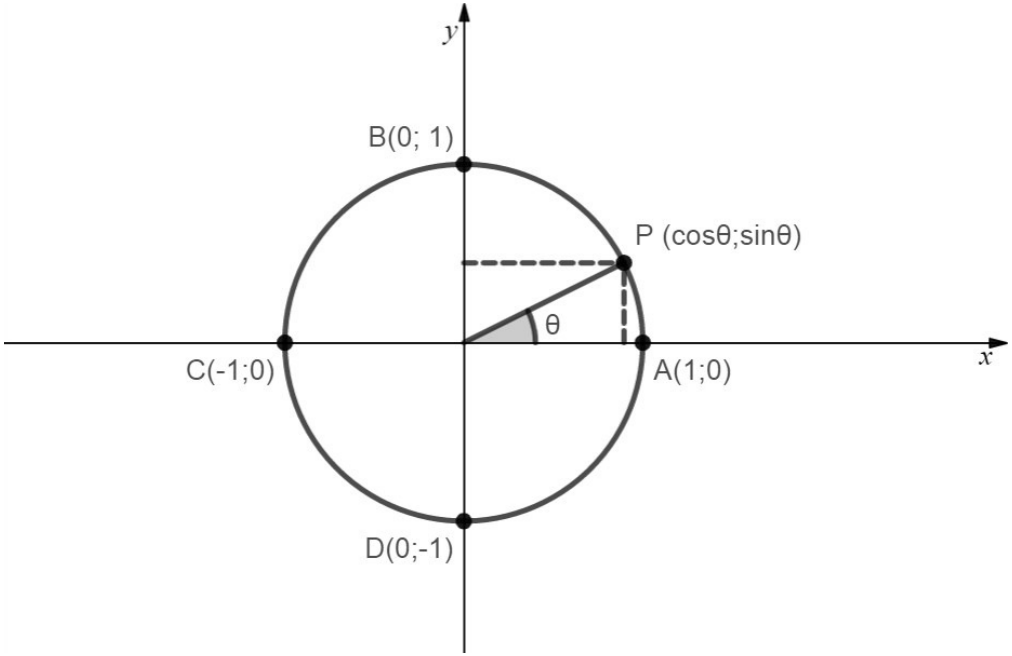
Radianti

- Ecco alcune corrispondenze tra angoli e radianti.
- Si noti che, poichè una circonferenza è lunga 2 π r :
  - L'angolo giro di 360° misura $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$
  - L'angolo piatto di 180° misura π
  - L'angolo retto di 90° misura $\frac{\pi}{2}$



Circonferenza goniometrica

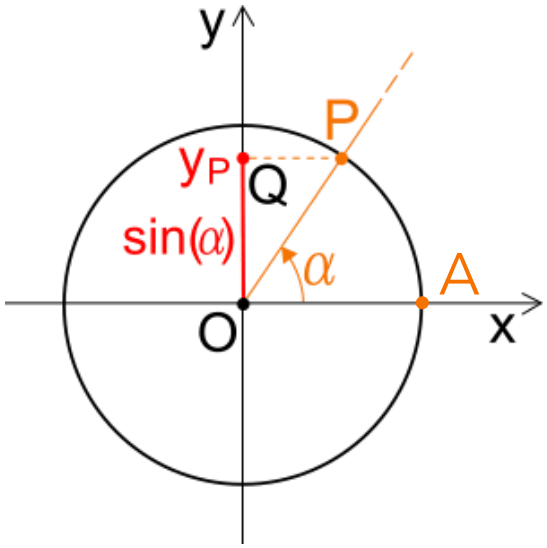
- La circonferenza di centro l'origine del sistema e raggio 1 è detta **circonferenza goniometrica**.
- Convenzionalmente si prende il punto A di coordinate (1, 0) come origine degli archi e scegliamo il senso antiorario per spazzare gli angoli.



Seno di un angolo

Data una circonferenza goniometrica, consideriamo un punto P sulla circonferenza, sarà così dato un arco AP, che spazza un angolo α (convenzionalmente in senso antiorario).
L'ordinata del punto P è detta seno di α e si scrive sen(α).

Poichè il raggio della circonferenza goniometrica è 1 il massimo valore che il seno può raggiungere è di 1 (a 90°, cioè $\pi/2$), mentre il minimo valore che il seno può raggiungere è -1 (a 270°, cioè 3/2 π).



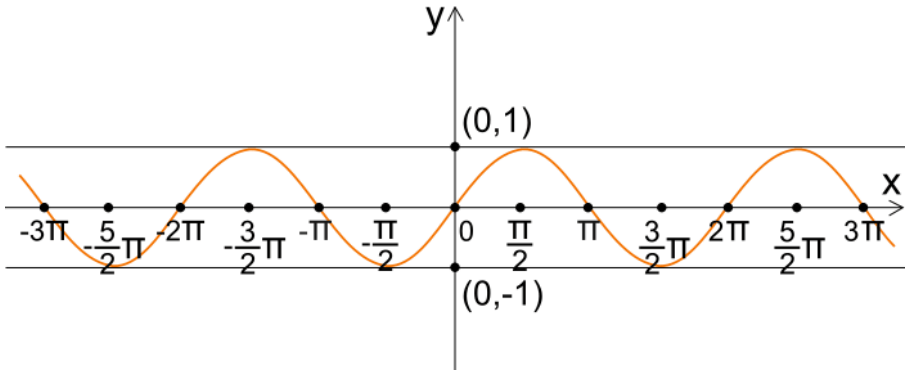
$\text{sen}(0) = 0$
$\text{sen}\ (\pi/2) = 1$
$\text{sen}\ (\pi) = 0$
$\text{sen}\ (3/2\ \pi) = -1$
$\text{sen}\ (2\pi) = 0$

Funzione seno

Si può definire il seno anche di un angolo maggiore di 2 π (e anche di un angolo negativo). È subito chiaro che i valori del seno si ripeteranno ciclicamente, perchè **angoli che differiscono di un multiplo di 360° (di 2 π), hanno lo stesso valore del seno.**

Possiamo allora definire una funzione reale a variabile reale che ad ogni numero reale x (l'angolo espresso in radianti) associa il valore del seno dell'angolo x.

Ecco il grafico della funzione y = sen(x):



Funzione seno

- **La funzione sen(x) è limitata da -1 a 1**, cioè la sua Immagine è l'intervallo [-1, 1].
- **Inoltre la funzione sen(x) è periodica di periodo 2 π**, cioè sen(x + 2k π) = sen (x) con k numero relativo.

Le funzioni goniometriche servono a modellizzare quei fenomeni che si ripetono con periodicità

- **La funzione seno non è iniettiva e quindi non invertibile.** E' possibile però invertire delle sue restrizioni, per esempio nell'intervallo [- π/2, π/2].
- **L'inversa della funzione seno in questo intervallo è la funzione arcsen(x), con D=[-1, 1],** che ad ogni numero compreso tra -1 e 1 associa l'arco compreso tra - π/2 e π/2 il cui seno è x.
- Per esempio, arcsen(1)= π/2, arcsen(0)=0.

Coseno di un angolo

Data una circonferenza goniometrica, consideriamo un punto P sulla circonferenza, sarà così dato un arco AP, che spazza un angolo α (convenzionalmente in senso antiorario). **L'ascissa del punto P è detta coseno di α e si scrive cos(α).**

Poichè il raggio della circonferenza goniometrica è 1 il massimo valore che il coseno può raggiungere è di 1 (a 0°), e il minimo valore che il coseno può raggiungere è -1 (a 180°, cioè π).

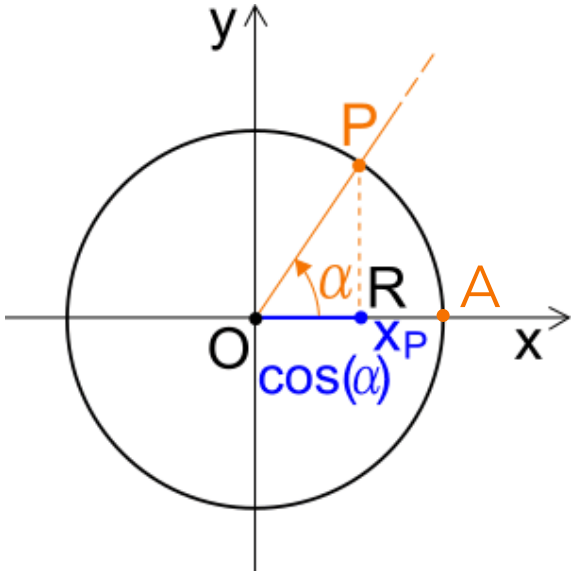
$\cos(0) = 1$

$\cos(\pi/2) = 0$

$\cos(\pi) = -1$

$\cos(3/2\ \pi) = 0$

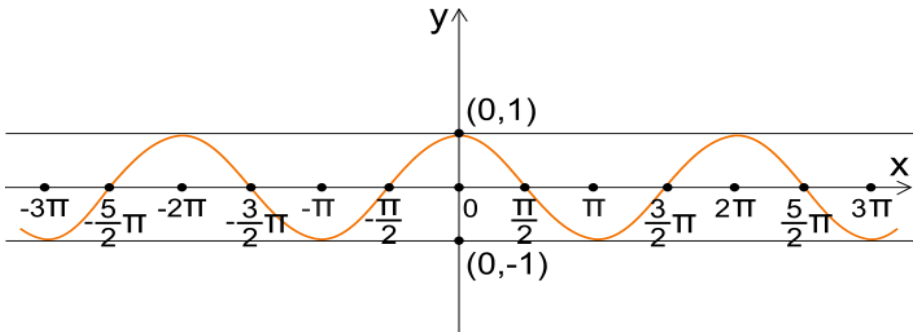
$\cos(2\pi) = 1$



Funzione coseno

Si può definire il coseno anche di un angolo maggiore di 2 π (e anche di un angolo negativo). È subito chiaro che i valori del coseno si ripeteranno ciclicamente, perchè **angoli che differiscono di un multiplo di 360° (di 2 π), hanno lo stesso valore del coseno.**
Possiamo allora definire una funzione reale a variabile reale che ad ogni numero reale x (l'angolo espresso in radianti) associa il valore del coseno dell'angolo x.

Ecco il grafico della funzione y = cos(x):



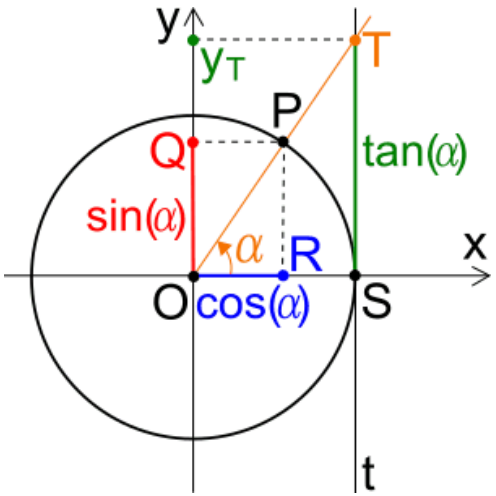
Funzione coseno

- Anche la funzione cos(x) è limitata da -1 a 1, cioè la sua Immagine è l'intervallo [-1, 1].
- Anche la funzione cos(x) è periodica di periodo 2 π, cioè cos(x + 2k π) = cos (x) con k numero relativo.
- Anche la funzione coseno non è iniettiva e quindi non è invertibile, ma è possible invertire le sue restrizioni, per esempio nell'intervallo [0, π].
- L'inversa della funzione cos(x) ristretta in questo intervallo è la funzione arccos(x), con D=[-1,1], che ad ogni numero tra -1 e 1 associa l'arco compreso tra 0 e π il cui coseno è x.
- Per esempio, arccos(1)=0, arcocos(0)= π/2.

Tangente di un angolo

Data una circonferenza goniometrica, consideriamo un punto P sulla circonferenza, sarà così dato un arco SP, che spazza un angolo α (convenzionalmente in senso antiorario). Consideriamo la retta tangente alla circonferenza nel punto S, origine degli archi e consideriamo, se esiste, il punto T di intersezione tra tale tangente e la retta OP.

L'ordinata del punto T è detta tangente di α e si scrive tan(α) oppure tg(α).



$$tg(0) = \frac{sen(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$tg(\pi/2) = \frac{sen(\pi/2)}{\cos(\pi/2)} = \frac{1}{0}$, pertanto la tangente a π/2 non esiste

$$tg(\pi) = \frac{sen(\pi)}{\cos(\pi)} = \frac{0}{-1} = 0$$

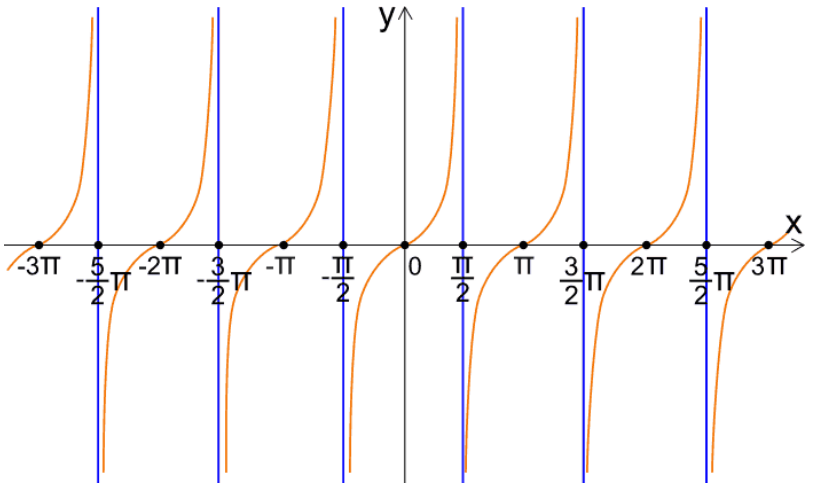
$tg\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{sen\left(\frac{3}{2}\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)} = \frac{-1}{0}$, pertanto la tangente a 3/2 π non esiste

$$tg(2\pi) = \frac{sen(2\pi)}{\cos(2\pi)} = \frac{0}{1} = 0$$

Funzione tangente

Anche per la tangente, come per il seno e il coseno, si può definire una funzione reale a variabile reale che **ad ogni numero reale x del Dominio (l'angolo espresso in radianti) associa il valore della tangente dell'angolo x**. Dal Dominio occorre escludere tutti i valori π /2 + k π, con k numero relativo, cioè tutti i valori multipli di π /2 e 3/2 π.

Ecco il grafico della funzione y = tg(x):



Mentre seno e coseno sono periodiche di 2 π, la tangente è periodica di π.

Tabella valori

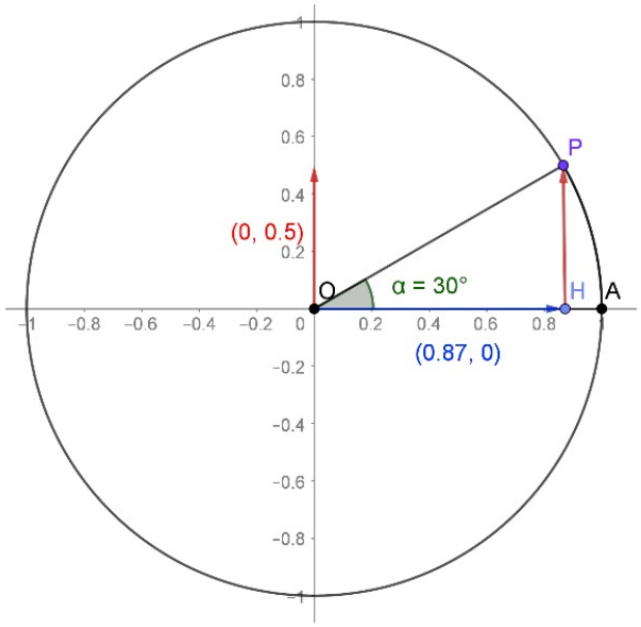
Tabella dei valori

gradi	Rad.	senα	cosα	tgα	gradi	Rad.	senα	cosα	tgα
0°	0	0	1	0	180°	π	0	-1	0
30°	π/6	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	210°	7π/6	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	225°	5π/4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	240°	4π/3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	π/2	1	0	N.D.	270°	3π/4	-1	0	N.D.
120°	2π/3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	300°	5π/3	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	3π/4	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	315°	7π/4	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	5π/6	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	330°	11π/6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

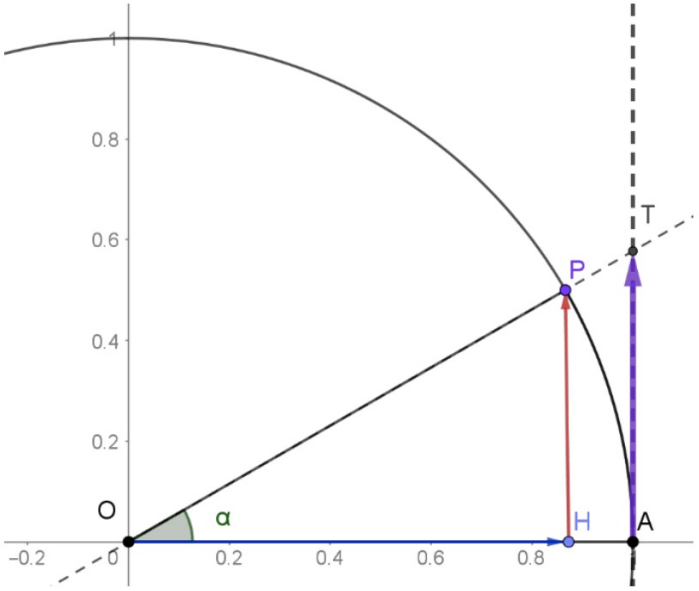
Relazioni fondamentali della goniometria – prima relazione

Dato un angolo α, il seno e il coseno di α sono i due cateti di un triangolo rettangolo di ipotenusa 1 (il raggio OP). Quindi, applicando il Teorema di Pitagora:

$$\boldsymbol{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$



Relazioni fondamentali della goniometria – seconda relazione



Consideriamo I due triangoli OPH e OTA.
Essi sono simili, perchè entrambi rettangoli, hanno l'angolo α in comune e quindi anche gli angoli in P e in T sono congruenti. Allora anche i rispettivi lati saranno proporzionali. Questo significa che:

PH : OH = TA : OA

Ma: PH = sin α, OH = cos α, TA = tan α, OA = raggio = 1, quindi:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\tan(\alpha)}{1}$$

Da cui:

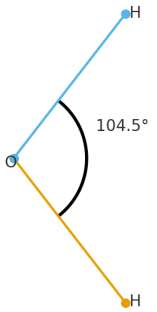
$$\boldsymbol{\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Funzioni goniometriche – esempio in chimica

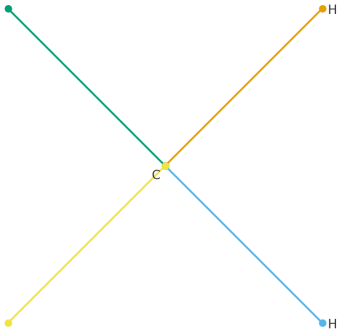
- Le molecole hanno atomi disposti nello spazio a certi angoli: l'**angolo di legame** è l'angolo tra due legami che partono dallo stesso atomo centrale (es. H–O–H pe l'acqua).
- Per calcolare la **posizione esatta** di un atomo nello spazio, si usano seno e coseno per descrivere le componenti x, y, z di ogni legame → x = r x cos(θ) e y = r x sin(θ).

- Differente geometria molecolare ⟶ angoli diversi:
  Lineare (CO_2): 180°
  Planare trigonale (BF_3): 120°
  Tetraedrica (CH_4): ~109.5°
  Piegata / piramidale (H_2O, NH_3): ~104.5° / ~107°

Schema 2D: angolo H–O–H (acqua)



Proiezione 2D: struttura tetraedrica (CH4)
Angolo ≈ 109.5° (ideale 109.5°)



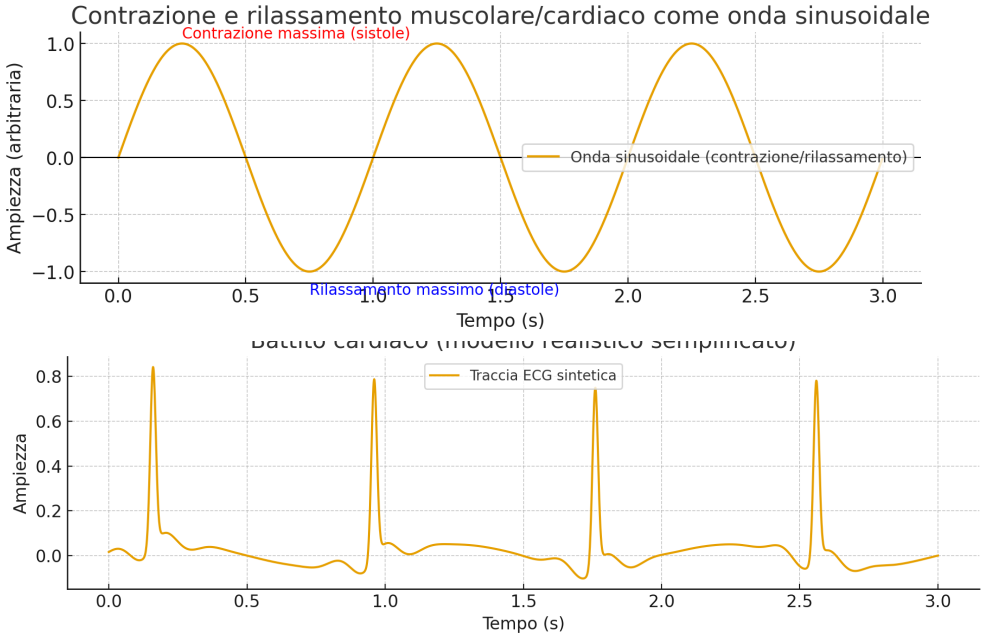
Funzioni periodiche – esempio in biologia

l cuore (così come i muscoli scheletrici) funziona con un'alternanza regolare di **contrazione** e **rilassamento**. Questo movimento periodico può essere **approssimato** con una funzione sinusoidale (tipo y = sin(t)), perché:

•il **valore massimo** dell'onda rappresenta la contrazione massima (sistole, nel cuore);

•il **valore minimo** rappresenta il rilassamento massimo (diastole);

•la **frequenza** dell'onda corrisponde alla frequenza dei battiti cardiaci o della contrazione muscolare.



•In alto: **onda sinusoidale ideale**, che rappresenta l'alternanza regolare di contrazione e rilassamento.

•In basso: **traccia ECG sintetica**, che mostra un modello più realistico del battito cardiaco, con picchi (complessi QRS) e onde più complesse rispetto alla semplice sinusoide.

Parte 2

I limiti

Definizione

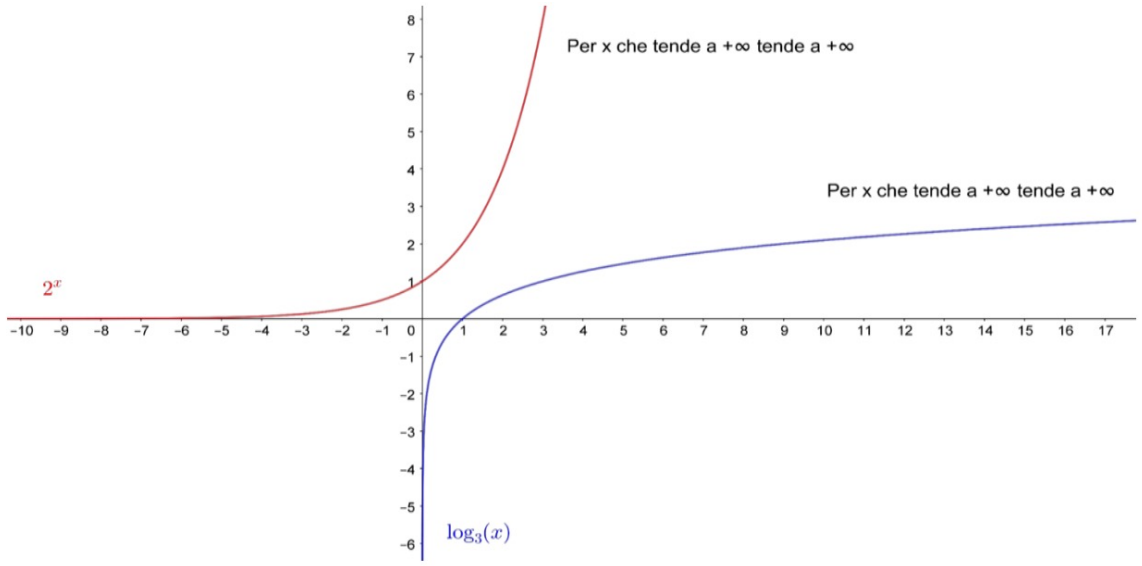
- Il limite di una funzione f(x) quando x si avvicina a un valore c, indicato come **lim(x -> c) f(x)**, rappresenta il valore che f(x) si avvicina sempre di più quanto x si avvicina a c.
- Formalmente, si dice che il limite esiste se, per ogni numero positivo ε (epsilon), esiste un numero positivo δ (delta) tale per cui $|f(x) - L| < \varepsilon$ per tutti i valori di x che soddisfano $0 < |x - c| < \delta$.
- Notazione: La notazione standard per denotare un limite è **lim(x -> c) f(x)** = L, dove "L" rappresenta il limite della funzione f(x) quando x si avvicina a c.

Comportamento asintotico di una funzione

- Per **comportamento asintotico** di una funzione f(x) si intende descrivere il comportamento di f(x) quando la variabile indipendente x assume valori molto grandi, cioè tende a $+\infty$, oppure a $-\infty$.
- Se per x che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$, una funzione tende a ∞ la funzione si dice **divergente** (positivamente se tende a $+\infty$, negativamente se tende a $-\infty$).
- Se per x che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$, una funzione tende a un numero finito la funzione si dice **convergente**.

Limiti di funzioni note

- Se **a > 1**, **funzioni esponenziali a^x e funzioni logaritmo $\log_a(x)$** sono <u>divergenti positivamente</u> per x che tende a +∞ :



Limiti di funzioni note – esempio: crescita batterica in coltura

In condizioni ideali, senza limiti di nutrienti, i batteri possono crescere secondo una legge **esponenziale**:

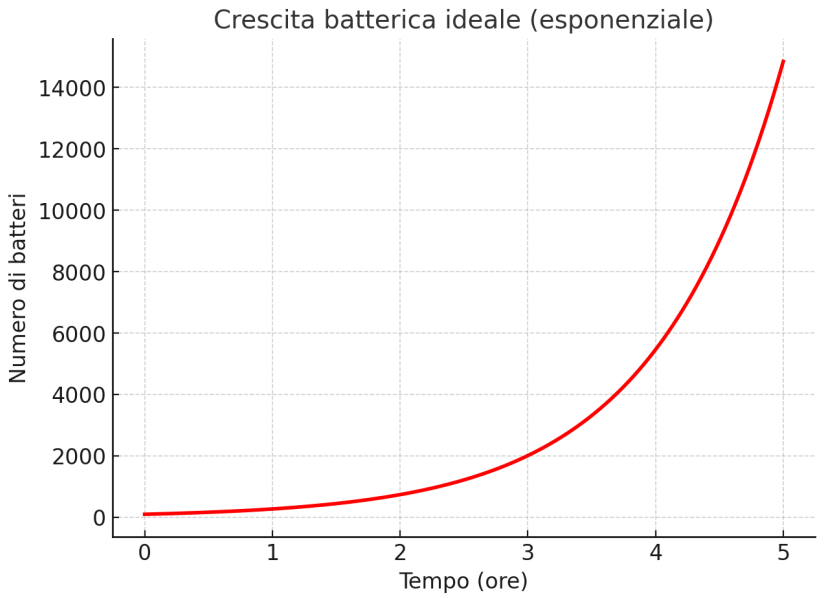
$$N(t) = N_0 \cdot e^{rt}$$

- $N(t)$ = numero di batteri al tempo t
- N_0 = numero iniziale di batteri
- r = tasso di crescita

Limite esponenziale

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$$

Significa che, se non ci fossero vincoli ambientali, la popolazione batterica **diverge positivamente**, cioè cresce senza limiti.



Limiti di funzioni note – esempio: tossicità di una dose crescente

La **risposta biologica** a una dose di farmaco spesso si descrive con una funzione **logaritmica**:

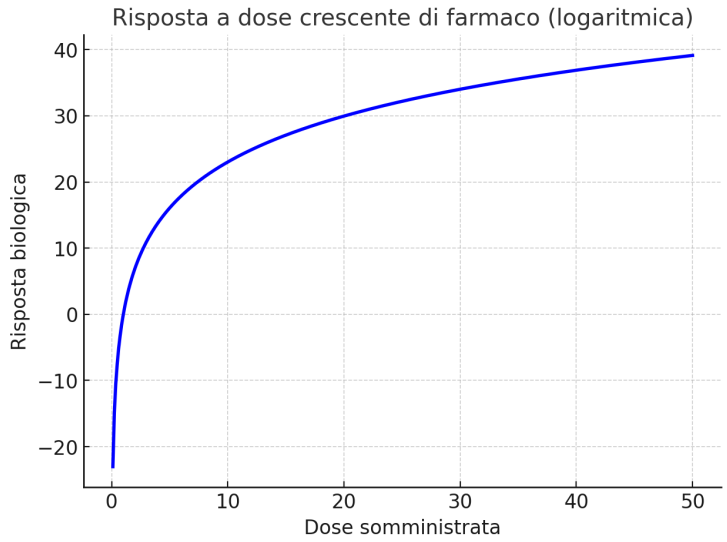
$$R(D) = k \cdot \ln(D)$$

- $R(D)$ = risposta dell'organismo (ad es. pressione arteriosa, inibizione enzimatica)
- D = dose del farmaco
- k = costante di proporzionalità

Limite logaritmico

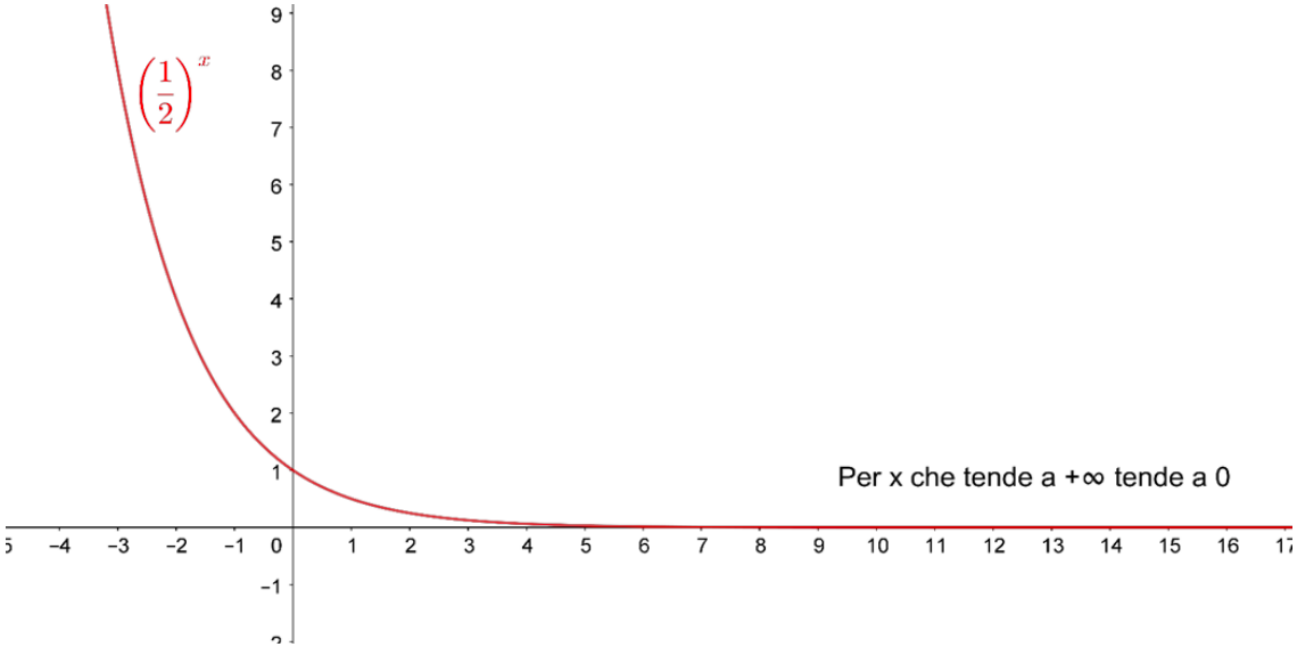
$$\lim_{D \to +\infty} R(D) = +\infty$$

Indica che, aumentando indefinitamente la dose, anche la risposta cresce senza limite (**divergenza positiva**). Naturalmente nella realtà biologica intervengono limiti fisiologici o tossicità,
ma matematicamente il logaritmo diverge.



Limiti di funzioni note

- Se **a < 1**, funzioni esponenziali a^x sono <u>convergenti a zero</u> per x che tende a +∞ :



Limiti di funzioni note – esempio: eliminazione di un farmaco

Quando un farmaco viene eliminato dall'organismo, la sua concentrazione nel sangue può essere descritta da:

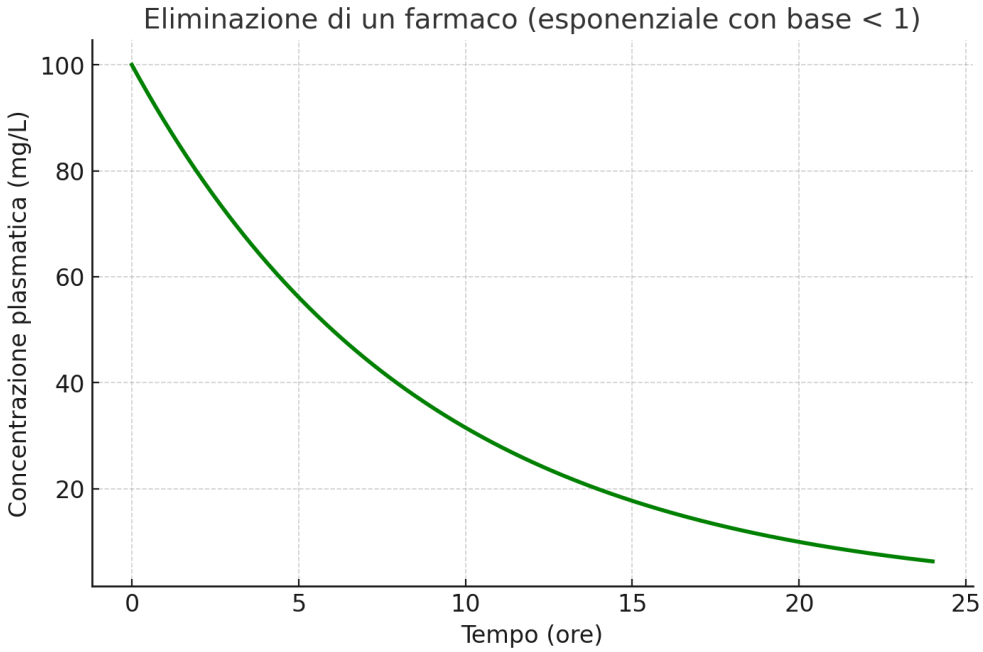
$$C(t) = C_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{t/t_{1/2}}$$

- $C(t)$ = concentrazione del farmaco al tempo t
- C_0 = concentrazione iniziale
- $t_{1/2}$ = tempo di dimezzamento

Limite

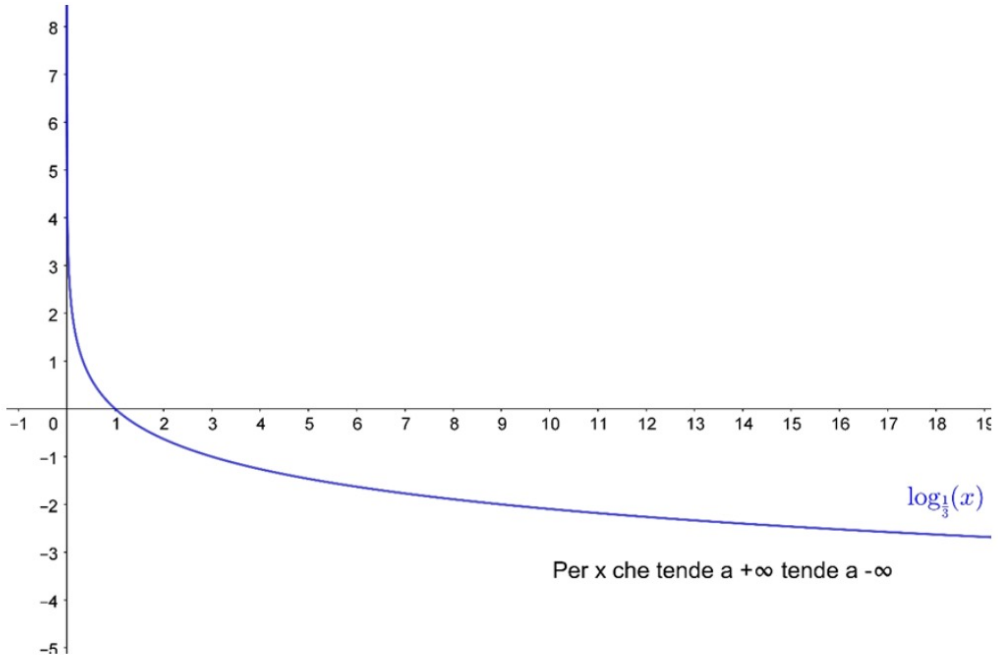
$$\lim_{t \to +\infty} C(t) = 0$$

Significa che col passare del tempo la concentrazione del farmaco tende a zero: il corpo lo elimina completamente –> **funzione convergente a zero**



Limiti di funzioni note

- Se **a < 1**, funzioni logaritmo $\log_a(x)$ sono <u>divergenti negativamente</u> per x che tende a +∞:



Limiti di funzioni note – esempio: eliminazione di un farmaco

• **Modello classico (base > 1):**
La relazione dose-effetto spesso segue un logaritmo con base > 1 o una curva sigmoide. Più aumenta la dose, più cresce la risposta fino a un plateau (effetto massimo). È ciò che ci aspettiamo normalmente per un farmaco agonista.

• **Caso anomalo (base < 1):**
Se usiamo una base a<1, il logaritmo è **decrescente**:

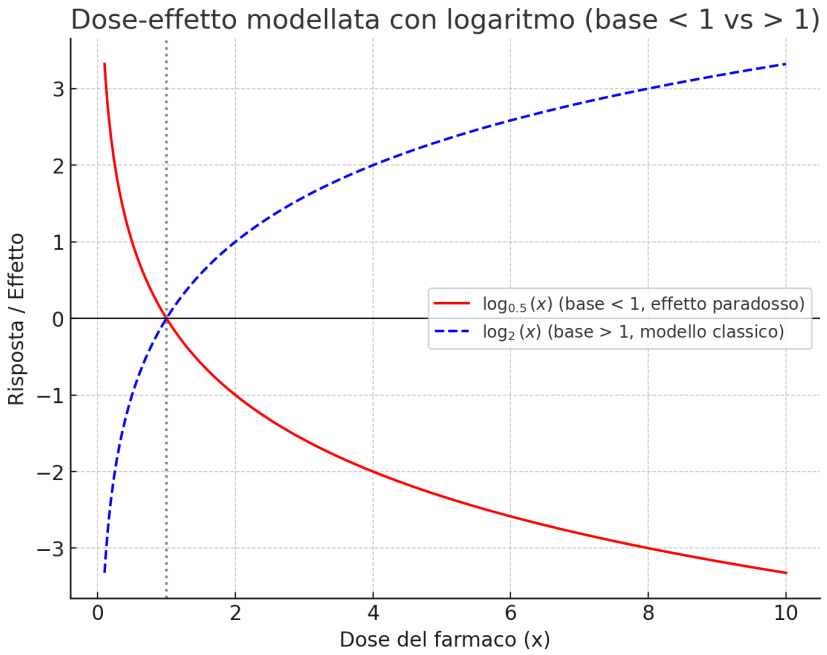
- per x≈1, l'effetto è nullo;
- per dosi **crescenti** (x→+∞), l'effetto →−∞.

Questo può descrivere un **effetto paradosso**: più dose → meno effetto.
Fenomeni reali che ricordano questo andamento:

1. Down-regulation recettoriale: a dosi alte i recettori vengono desensibilizzati o internalizzati, e l'effetto sparisce.

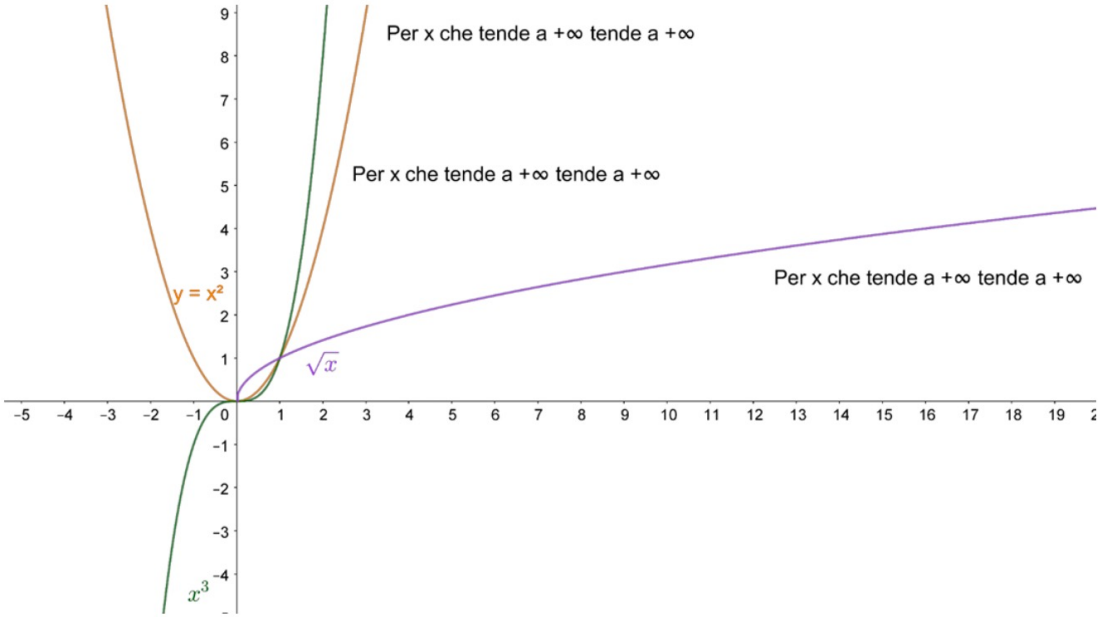
2. Tossicità o inversione d'effetto: certi farmaci (es. alcune benzodiazepine, antidepressivi, antipsicotici) possono avere l'effetto opposto a quello terapeutico se la dose è troppo alta.

3. Fenomeno dell'ormesi: piccole dosi stimolano, dosi alte deprimono o uccidono.



Limiti di funzioni note

- Funzioni **potenza x^k** per k numero naturale (k = 2,3,4, etc …) ma anche per k numero razionale (k = 1⁄2, 1/3, etc …), cioè funzioni radice, divergono positivamente per x che tende a +∞:



Limiti dell'iperbole equilatera

- Data l'iperbole equilatera $f(x) = 1/x$, definita in $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
- Quando si divide per un numero che tende a zero si ottiene un numero che tende a infinito, e quando si divide per un numero che tende a infinito si ottiene un numero che tende a zero, quindi:
- Se $x \to 0$, $1/x \to \infty$;
- Se $x \to \infty$, $1/x \to 0$
- **Attenzione ai segni**: se, per esempio, dividiamo 1 per $+\infty$ il risultato sarà un numero vicino a 0, ma positivo, che indichiamo con 0^+ e se dividiamo 1 per $-\infty$ il risultato sarà un numero vicino a 0, ma negativo, che indichiamo con 0^-.

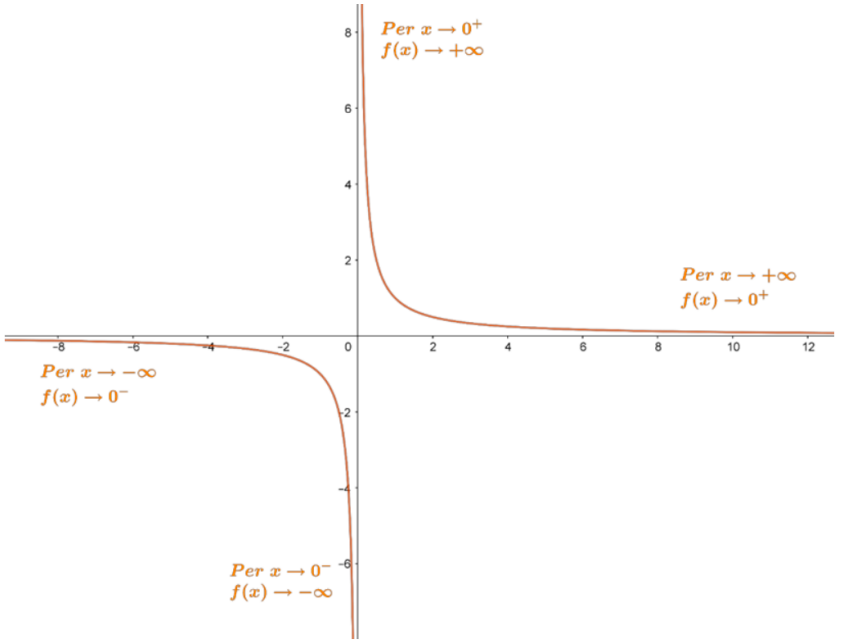
Limiti dell'iperbole equilatera

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+;$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$$



Funzione divergente positivamente

- Data una funzione reale a variabile reale y = f(x), si dice che il limite della f(x) per x che tende a +∞ è +∞ e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- se scelta una qualunque soglia di y arbitrariamente fissata, f(x) supera quella soglia, cioè se fissato un certo $\bar{y}$, esiste un valore $\bar{x}$ tale per che ogni x > $\bar{x}$ si ha: f(x) > $\bar{y}$.

Funzione divergente negativamente

- Data una funzione reale a variabile reale f(x), si dice che il limite della f(x) per x che tende a $+\infty$ è $-\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- se scelta una qualunque soglia di y arbitrariamente fissata, f(x) rimane sotto quella soglia, cioè se fissato un certo $\bar{y}$, esiste un valore $\bar{x}$ tale per che ogni $x > \bar{x}$ si ha: $f(x) < \bar{y}$.

Funzione convergente

- Data una funzione reale a variabile reale f(x), e dato un numero reale l, si dice che il limite della f(x) per x che tende a $+\infty$ è l o che la funzione converge a l e si scrive:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

- se scelto un valore soglia ε (si legge epsilon) , esiste un valore $\bar{x}$ tale che per ogni x $> \bar{x}$, f(x) si avvicina a l, nel senso che dista da l meno della soglia scelta ε.
- Dire che f(x) dista da l meno di ε significa che $l - \varepsilon <$ f(x) $< l + \varepsilon$.
- La retta y = l si chiama **asintoto orizzontale**.

Proprietà dei limiti

A. Il limite della somma di due funzioni è la somma dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo $+\infty - \infty$;
B. Il limite del prodotto di due funzioni è il prodotto dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo $0 \cdot \infty$;
C. Il limite del quoziente di due funzioni è il quoziente dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo $0/0$ oppure ∞/∞;
D. Il limite della potenza è la potenza dei limiti, a meno che il risultato non sia del tipo 0^0, oppure ∞^0 oppure 1^∞.
E. Il limite del reciproco di un infinito è un infinitesimo e il limite del reciproco di un infinitesimo è un infinito.

Proprietà dei limiti

A. Il limite del reciproco di un infinito è un infinitesimo e il limite del reciproco di un infinitesimo è un infinito.

Affermazione 1: Il limite del reciproco di un infinito è un infinitesimo.

Supponiamo di avere la funzione f(x) = 1/x e vogliamo calcolare il limite di questa funzione quando x tende all'infinito positivo:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

In questo caso, il limite è effettivamente zero, che è un infinitesimo. Questo significa che quando x diventa sempre più grande (tendendo a +infinito), il valore della funzione f(x) si avvicina sempre di più a zero.

Proprietà dei limiti

A. Il limite del reciproco di un infinito è un infinitesimo e il limite del reciproco di un infinitesimo è un infinito.

Affermazione 2: Il limite del reciproco di un infinitesimo è un infinito.

Supponiamo di avere la funzione g(x) = x, e vogliamo calcolare il limite del reciproco di questa funzione quando x tende a zero positivo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

In questo caso, il limite è un infinito positivo. Ciò significa che quando x si avvicina a zero positivo, il valore del reciproco di g(x), cioè 1/x, diventa sempre più grande e tende all'infinito positivo.

Proprietà dei limiti

- Le forme che non rientrano in queste proprietà si chiamano **forme indeterminate**.

$$+\infty - \infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0^0; \quad \infty^0; \quad 1^\infty$$

Esempio

- Calcolare il limite: $\lim_{x\to+\infty}(log_2 x^2 + \frac{3}{e^x})$

Poichè il limite della somma è la somma dei limiti (proprietà A) calcoliamo separatamente i limiti dei due addendi:

$$\lim_{x\to+\infty}(log_2 x^2)$$

per x che tende a +∞, x^2 tende a +∞, quindi, dato che l'argomento del logaritmo tende a +∞ e che la base del logaritmo è maggiore di 1 $\lim_{x\to+\infty}(log_2 x^2)$=+∞

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{e^x}\right)$$

Il limite del quoziente è il quoziente dei limiti (proprietà C) per calcolare il limite per x che tende a + ∞ di 3 ,calcoliamo separatamente i limiti di numeratore e denominatore.

Il numeratore è una costante, pertanto per x che tende a +∞ tende a 3. Il denominatore è una funzione esponenziale con base maggiore di 1, pertanto tende a +∞. Poichè il reciproco di un infinito è un infinitesimo (proprietà E) l'intera frazione tende a 0.

Pertanto: $\lim_{x \to +\infty} \left(log_2 x^2 + \frac{3}{e^x}\right) = +\infty$

Gerarchie di infiniti

- Quando una funzione f(x) diverge positivamente più rapidamente di un'altra funzione g(x) si dice che f(x) è **un infinito di ordine superiore** rispetto a g(x).
- Più formalmente, f(x) è di ordine superiore a g(x) se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f)x)}{g(x)} = +\infty$, ed f(x) e g(x) sono dello stesso ordine se $\lim_{x\to+\infty} \frac{f)x)}{g(x)} = l \neq 0$.

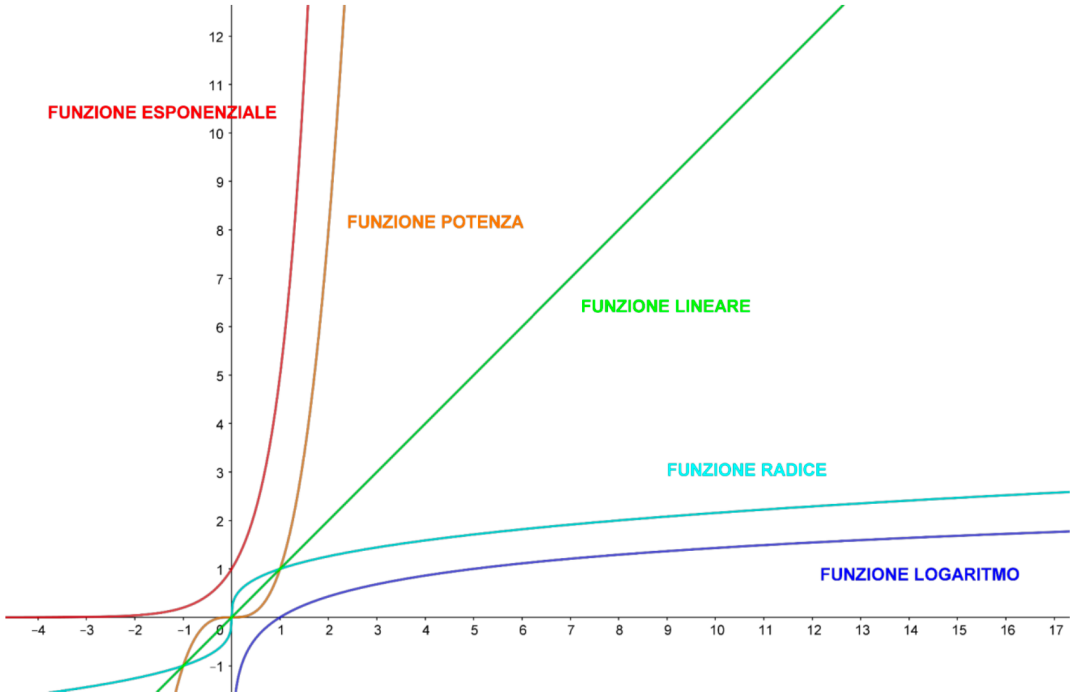
Gerarchie di infiniti

Scriviamo alcune funzioni divergenti note, da quelle di ordine superiore a quelle di ordine inferiore:

1. FUNZIONI ESPONENZIALI CRESCENTI
2. FUNZIONI POLINOMIALI POTENZA
3. FUNZIONI LINEARI
4. FUNZIONI RADICE
5. FUNZIONI LOGARTIMO CRESCENTI

Questo vuol dire che, per esempio, anche se una funzione logaritmo tende a $+\infty$, essa è trascurabile rispetto a una funzione lineare, e una funzione lineare anche se tende a $+\infty$ è trascurabile rispetto a una funzione esponenziale

Gerarchie di infiniti



Esercizi

1) $\lim_{x \to +\infty} (\log_4 x - \sqrt{x})$.

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^5-2x^2}$.

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^4-12x^3+3x-2}{3x^4+2x^3-2x+1}$.

1

1) $\lim_{x\to+\infty}(\log_4 x - \sqrt{x})$. → $\log_4 x = \frac{\ln x}{\ln 4}$. → $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln 4} - \sqrt{x}\right)$.

- La funzione $\ln x$ cresce molto più lentamente di $\sqrt{x}$ quando $x \to +\infty$.
- Quindi $-\sqrt{x}$ domina e il limite tenderà a $-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln 4} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(-1 + \frac{\ln x}{\ln 4\cdot\sqrt{x}}\right). \longrightarrow \frac{\ln x}{\ln 4\cdot\sqrt{x}}:$$

- Quando $x \to +\infty$, il denominatore $\ln 4 \cdot \sqrt{x}$ cresce molto più rapidamente del numeratore $\ln x$.
- Pertanto, $\frac{\ln x}{\ln 4\cdot\sqrt{x}} \to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\ln 4}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot(-1+0)=\lim_{x\to+\infty}-\sqrt{x}.$$

Poiché $-\sqrt{x}\to-\infty$ quando $x\to+\infty$, il risultato è: $\boxed{-\infty}$.

2

2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2+2x-1}{x^5-2x^2}$.

$$\frac{3x^2+2x-1}{x^5-2x^2} = \frac{\frac{3x^2}{x^5}+\frac{2x}{x^5}-\frac{1}{x^5}}{1-\frac{2x^2}{x^5}}. \longrightarrow \frac{\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{1-\frac{2}{x^3}}.$$

Quando $x \to +\infty$:

- $\frac{3}{x^3} \to 0$,
- $\frac{2}{x^4} \to 0$,
- $\frac{1}{x^5} \to 0$,
- $\frac{2}{x^3} \to 0$.

$$\longrightarrow \frac{0+0-0}{1-0} = 0.$$

3

3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{6x^4 - 12x^3 + 3x - 2}{3x^4 + 2x^3 - 2x + 1}.$

$$\frac{6x^4 - 12x^3 + 3x - 2}{3x^4 + 2x^3 - 2x + 1} = \frac{\frac{6x^4}{x^4} - \frac{12x^3}{x^4} + \frac{3x}{x^4} - \frac{2}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4} + \frac{2x^3}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4}}. \longrightarrow \frac{6 - \frac{12}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^4}}{3 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}.$$

Quando $x \to +\infty$:

- $\frac{12}{x} \to 0,$
- $\frac{3}{x^3} \to 0,$
- $\frac{2}{x^4} \to 0,$
- $\frac{2}{x} \to 0,$
- $\frac{2}{x^3} \to 0,$
- $\frac{1}{x^4} \to 0.$

$$\longrightarrow \frac{6 - 0 + 0 - 0}{3 + 0 - 0 + 0} = \frac{6}{3} = 2.$$

Parte 3

Le derivate

Derivata di una funzione

- Per conoscere quanto sta crescendo (o decrescendo) una certa funzione in un determinato punto, e anche l'andamento generale del suo tasso di variazione, cioè della velocità con cui cresce (o decresce), serve il concetto di **derivata di una funzione**.
- La derivata ci darà una misura della "suscettibilità" di una funzione f(x), dicendoci se f(x) varia rapidamente o lentamente al variare della x.
- Per capire come varia (quanto cresce o decresce) una funzione in suo punto x_0 (cioè in un punto x_0 del suo Dominio), valutiamo il rapporto $\Delta y/\Delta x$ a partire proprio dal punto x_0.
- Stabiliamo un certo incremento positivo h, arrivando al punto $x_0 + h$. In questo modo l'incremento Δx è $\Delta x = (x0 + h) - x0 = h$.
- Scriviamo l'incremento Δy che sarà $\Delta y = f(x0+h) - f(x0)$.

Rapporto incrementale

Il rapporto:

$$\frac{f(x_o + h) - f(x_0)}{h}$$

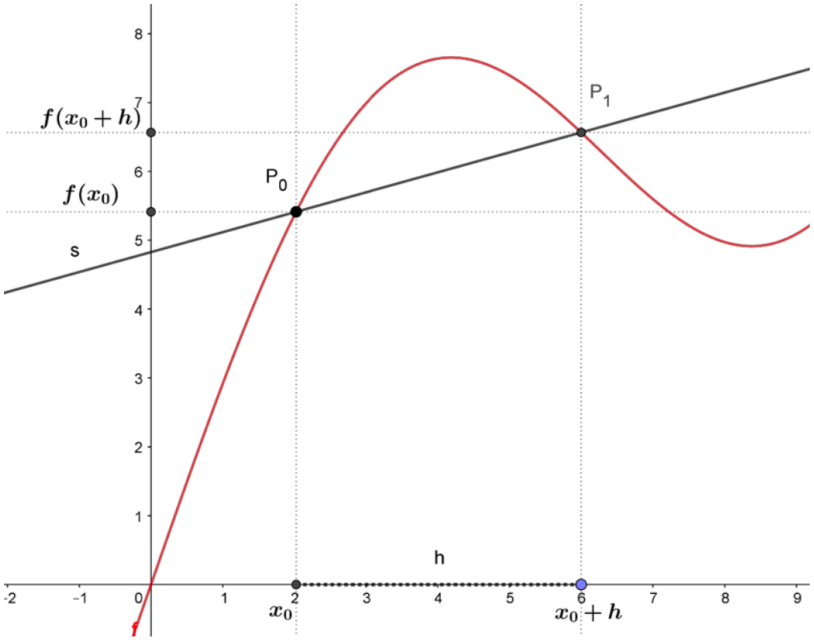
si chiama **rapporto incrementale** e stabilisce una “velocità media” della variazione della f(x) rispetto alla x.

Derivata puntuale

- Si voglia misurare la velocità istantanea in un punto, valutando la pendenza di una funzione nel punto.
- Data una funzione f(x), un punto x_0 del suo Dominio e un incremento h > 0, il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta s passante per i punti

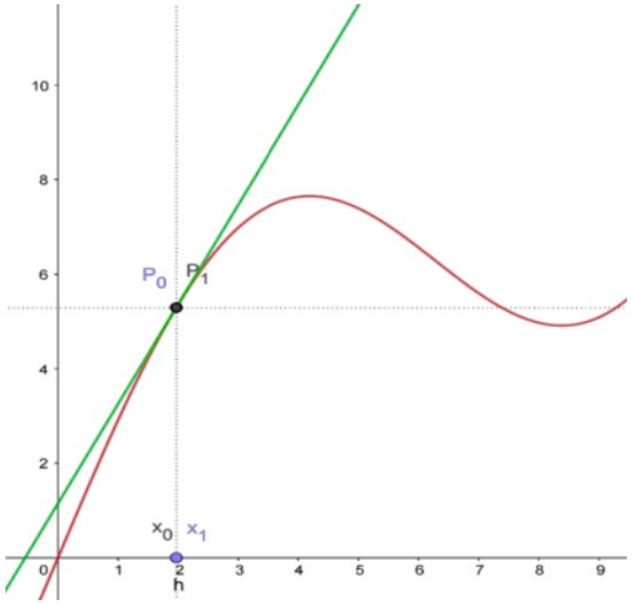
$$P_0 \equiv (x_0, f(x_0)) \; e \;\; P_1 \equiv (x_0 + h, f(x_0 + h))$$

Derivata puntuale



- Per misurare la pendenza della funzione nel punto di ascissa x_0, dobbiamo assicurarci che l'incremento h sia molto piccolo, cioè che la retta secante s diventi la retta tangente alla funzione nel punto di ascissa x_0.
- Per questo motivo calcoliamo il limite per h che tende a zero della funzione f(x).

Derivata puntuale



In questo modo nel punto di ascissa x_0 si approssima la funzione alla retta tangente.

Definizione di derivata

- Si definisce **derivata della funzione** f(x) nel punto x_0 e si scrive f ′(x0):

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

- Si può definire la derivata in un punto solo se in quel punto il limite per h che tende a zero esiste ed è un numero reale (non infinito).
- La derivata di una funzione in un punto x_0, allora, **è un numero che rappresenta il coefficiente angolare, e quindi la pendenza, della retta tangente alla funzione nel punto di ascissa x_0.**

Calcolo della derivata ed esempi

- Assegnata una funzione f(x), dato che in ogni punto x_0 si può calcolare il numero $f'(x_0)$, è possibile definire una funzione, che chiamiamo funzione derivata, che associa ad ogni punto x_0 la sua derivata.
- In generale, data una funzione f(x), si chiama funzione derivata, o semplicemente derivata, la funzione f ′(x) che associa ad ogni punto del Dominio di f(x) il valore della derivata puntuale in quel punto.
- Per capire come calcolare la derivata di una funzione facciamo un esempio pratico:

Calcolo della derivata ed esempi

- Sia data la funzione $f(x) = x^2$
- Scelto un qualsiasi punto x_0 appartenente al Dominio (che in questo caso coincide con R), avremo che:
- $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2{}_0+h^2+2x_0h-x^2{}_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+2x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+2x_0}{1} = 2x_0$
- Quindi, poichè la derivata puntuale di x^2 in ogni punto x_0 è $2x_0$, la derivata di f(x) = x^2 , è la funzione $f'(x) = 2x$.

Calcolo della derivata ed esempi

- Con calcoli simili si può anche trovare che, **se $f(x) = x^n$, la derivata di $f(x)$ è la funzione $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$**. E questo vale non solo per n numero naturale, ma anche se n è un numero razionale o negativo.
- Quindi, per esempio, la derivata di x^3 è $3x^2$, la derivata di x^5 è $5x^4$, ma possiamo anche scrivere le derivate di 1/x e $\sqrt{x}$
- 1/x = x-1 quindi la sua derivata sarà $-1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -1/x^2$
- $\sqrt{x}$=x1/2, quindi la sua derivate sarà $1/2 \cdot x^{(1/2-1)} = 1/2x^{-1/2} = 1/2\sqrt{x}$

Calcolo della derivata ed esempi

$f(x)$	$f'(x)$
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n\,x^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \frac{\log_a e}{x}$
$f(x) = sen(x)$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -sen(x)$

Regole di derivazione

Siano f(x) e g(x) due funzioni, che qui abbrevieremo rispettivamente con f e g, e sia c una costante. Allora:

A. Moltiplicazione per una costante: $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
B. Somma: $(f + g)' = f' + g'$
C. Prodotto: $(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g'$
D. Rapporto: $(\frac{f}{g})' = \frac{f' - g'}{g^2}$

Esempi

1. Deriviamo una funzione lineare, per esempio $f(x) = 3x + 24$.
   Per la regola B. la derivata della somma di 3x e di 24 è la somma delle derivate. Per la regola A. la derivate di 3x è 3 moltiplicato per la derivata di x, che è 1, e la derivata della costante 24 è zero. Quindi $f'(x) = (3x+ 24)' = 3 \cdot 1 + 0 = 3$.

In generale, **la derivata di una funzione lineare è sempre uguale al suo coefficiente angolare**. Infatti la derivata di una funzione ci racconta come cresce la funzione, e una funzione lineare cresce sempre secondo il suo coefficiente angolare.

Esempi

2. Deriviamo una funzione polinomiale, per esempio $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 3x + 1$.
   Per le regole di derivazione A. e B. abbiamo $f'(x) = 3 \cdot (5x^4) + 2 \cdot (3x^2) - 3 \cdot 1 + 0 = 15x^4 + 6x^2 - 3$. **In generale, la derivata di una funzione polinomiale di grado n è sempre un polinomio di grado n – 1.**

3. Deriviamo il prodotto di due funzioni, per esempio $f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) + x)$.
   Per la regola di derivazione C. la derivata del prodotto è la somma del primo fattore x^2 derivato per il secondo fattore $(\ln(x) + x)$ e del primo fattore x^2 per il secondo fattore $(\ln(x) + x)$ derivato. $(x^2)' = 2x$ e $(\ln(x) + x)' = 1/x + 1$. Allora $f'(x) = 2x \cdot (\ln(x) + x) + x^2 \cdot (1/x + 1)$.

Esempi

4. Deriviamo il rapporto di due funzioni, per esempio $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$

Per la regola di derivazione D. la derivata del rapporto è il rapporto in cui al denominatore c'è il quadrato della funzione x e al numeratore la differenza $(x^2 + 1)' \cdot (x) - (x^2 + 1) \cdot (x)'$.

Allora, $f'(x) = \frac{(2x)x-(x^2+1)1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Derivata di una funzione composta

Sia **h(x) = f(g(x))** una funzione composta. La sua derivata è:

$$\mathbf{h'(x) = (f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).}$$

Per semplicità, se omettiamo la variabile x possiamo scrivere:

$$\mathbf{h' = (f(g))' = f'(g) \cdot g'}$$

Esempi

1. Sia $h(x) = (x + 1)^7$

La funzione *h* è una funzione composta perchè a *x* associamo *x + 1* e a *x + 1* associamo $(x + 1)^7$.

Le due funzioni che compongono la *h* sono allora $f(x) = x^7$ e $g(x) = x + 1$.

In pratica la funzione *h* è la *f*, ma come argomento della *f* abbiamo invece di *x* la *g(x).*

La sua derivata allora è $\boldsymbol{h'(x) = f'(g) \cdot g' = 7(x + 1)^6 \cdot 1}$.

2) Sia $h(x) = e^{2x}$

h(x) è una funzione composta perchè a x associamo 2x e poi a 2x associamo e^{2x}.

Le due funzioni che compongono la h sono allora $f(x) = e^x$ e g(x) = 2x.

In pratica la funzione h è la f, ma come argomento della f abbiamo la g(x).

La derivata di h(x) allora è $\mathbf{h'(x) = f'(g) \cdot g' = e^{2x} \cdot 2 = 2e^{2x}}$.

3. Sia h(x) = ln(3x)

h(x) è una funzione composta perchè a x associamo 3x e poi a 3x associamo ln(3x).

Le due funzioni che compongono la h sono allora f(x) = ln(x) e g(x) = 3x.

In pratica la funzione h è la f, ma come argomento della f abbiamo la g(x).

La derivate di h(x) allora è $\mathbf{h' = f'(g) \cdot g' = \frac{1}{3x} 3 = \frac{1}{x}}$

Studio del segno di una funzione

Data una funzione f(x), e un punto x_0 del suo Dominio, il segno della derivata puntuale in x_0, f $'(x_0)$ determina la crescenza o decrescenza della funzione. Infatti f $'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente alla f(x) nel punto di ascissa x_0. Pertanto:

- Se f $'(x_0) > 0$ la f(x) è **crescente** in x_0
- Se f $'(x_0) = 0$ la f(x) è **stazionaria** in x_0
- Se f $'(x_0) < 0$ la f(x) è **decrescente** in x_0

Pertanto per stabilire gli intervalli in cui una funzione cresce, decresce o è stazionaria possiamo studiare il segno della sua derivata.

Esempio

- Consideriamo per esempio la funzione quadratica **$f(x) = x^2 + 2x - 15$.**
  - - Come sappiamo si tratta di una parabola quindi ci saranno intervalli in cui cresce e intervalli in cui decresce.
  - - Calcoliamo la derivata: **$f'(x) = 2x + 2$.**

- Per studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione andiamo a studiare il segno della derivata.

  - - $2x + 2 > 0$ se $x > -1$
  - Pertanto prima di -1 la derivata è negativa e la funzione decrescente
  - Dopo -1 la derivata è positiva e la funzione crescente.
  - Invece nel punto -1 la derivata è nulla e la funzione è stazionaria.

Esempio

Consideriamo per esempio la **funzione quadratica $f(x) = x^2 + 2x - 15$**.
Come sappiamo si tratta di una parabola quindi ci saranno intervalli in cui cresce e intervalli in cui decresce.

Calcoliamo la derivata.

La derivata di **f(x)=x2+2x−15** si ottiene applicando le regole del calcolo differenziale.

La funzione f(x) è una funzione polinomiale, e la derivata di ogni termine della funzione si calcola separatamente

1.La derivata di *x*2 rispetto a x è 2x, poiché in base alla regola di potenza $d/dx[x^n] = n \cdot x^{(n-1)}$ dove n=2.

2. La derivata di 2*x* rispetto a x è 2, poiché la derivata di *x* è 1 e quindi 2·1=2.

3. La derivata di una costante, come −15, è 0 perché la costante non cambia al cambiare di x.

Quindi, sommando le derivate otteniamo:

f’(x)=2x+2

Esempio

Per studiare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione andiamo a studiare il segno della derivata.

2x + 2 > 0 se x > −1, pertanto prima di −1 la derivata è negativa e la funzione decrescente, dopo −1 la derivata è positiva e la funzione crescente. Invece nel punto −1 la derivata è nulla e la funzione è stazionaria.

La derivata della funzione quadratica $f(x) = x^2 + 2x - 15$ è $f'(x) = 2x + 2$.

Per determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza di $f(x)$, possiamo studiare il segno della derivata $f'(x)$:

1. Impostiamo $f'(x)$ maggiore di zero per trovare dove la funzione è crescente:
   $2x + 2 > 0$
   $2x > -2$
   $x > -1$

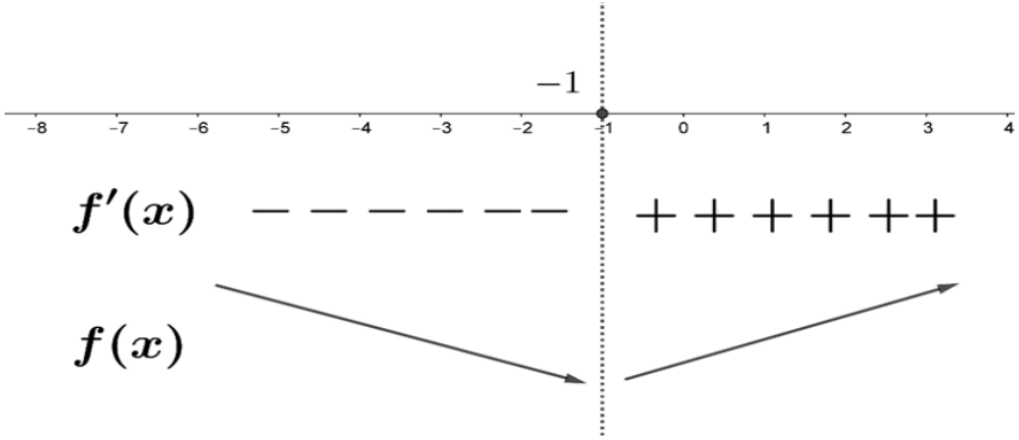
   Quindi, la funzione $f(x)$ è crescente per $x > -1$.

1. Impostiamo $f'(x)$ minore di zero per trovare dove la funzione è decrescente:
   $2x + 2 < 0$
   $2x < -2$
   $x < -1$

   Quindi, la funzione $f(x)$ è decrescente per $x < -1$.

La derivata si annulla quando $x = -1$, che corrisponde al vertice della parabola, ovvero il punto in cui la funzione passa da decrescente a crescente. Il vertice è quindi un punto di minimo per la funzione data.

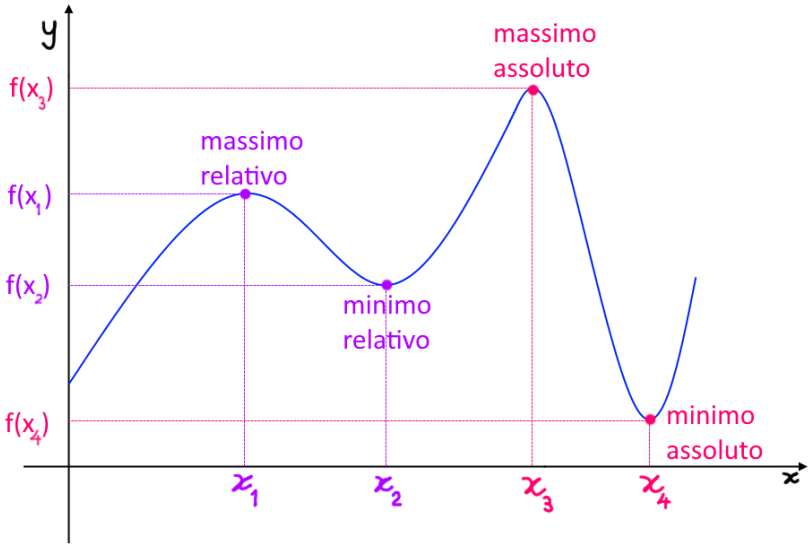
Esempio



Pertanto, poichè prima di −1 la funzione decresce e dopo −1 la funzione cresce, il punto di ascissa −1 è un **punto di minimo**. Infatti si tratta del vertice della parabola.

Estremi relativi di una funzione

Concettualmente, un punto è di **estremo relativo** se la funzione in quel punto tocca il suo valore più alto (in caso di massimo) o più basso (in caso di minimo) in un determinato intervallo contenente il punto.



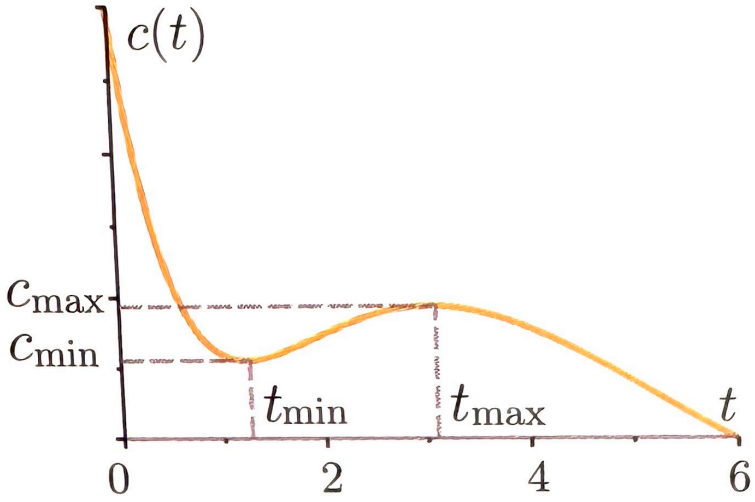
Estremi relativi di una funzione - esempio

Il grafico della figura rappresenta la variazione al passare del tempo, misurato in ore, della concentrazione c di una sostanza iniettata nel sangue.

Il grafico suggerisce che, partendo dal valore t = 0, in cui la concentrazione assume il valore massimo assoluto c(0), la concentrazione decresce fino a un valore di minimo relativo C_{min}, raggiunto al tempo t = T_{min}.

All'aumentare di t, la concentrazione cresce fino al valore di massimo relativo C_{max}, raggiunto al tempo t = T_{max}.

Da T_{max} in poi la concentrazione decresce fino al valore zero, minimo assoluto, raggiunto dopo 6 ore.



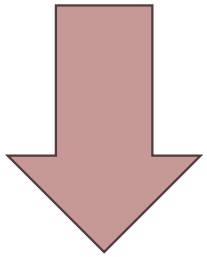
Estremi relativi di una funzione

- Formalizziamo ora le definizioni:
  Sia f: $]a, b[\rightarrow$ R, e sia $x_0 \epsilon$ $]a, b[$. Allora:
- il punto x_0 si dice di **massimo relativo**, se esiste un intervallo I (cioè un sottoinsieme continuo di]a, b[, del tipo $I =]x0 - \delta, x0 + \delta[$, tale che per ogni $x \epsilon I$, f(x0) ≥ f(x);
- il punto x_0 si dice di **minimo relativo**, se esiste un intervallo I (cioè un sottoinsieme continuo di]a, b[, del tipo $I =]x0 - \delta, x0 + \delta[$, tale che per ogni $x \epsilon I$, f(x0) ≤ f(x).

Tutti i punti di massimo relativo o minimo relativo sono a tangente orizzontale.

Teorema di Fermat

Sia $f:]a, b[\rightarrow$ R, sia $x_0 \epsilon\ ]a, b[$ un punto di estremo relativo (massimo o minimo) e sia f derivabile in x_0 (cioè la derivata nel punto x_0 esiste).



Allora $f'(x_0) = 0$, cioè nel punto di ascissa x_0 c'è una tangente orizzontale.

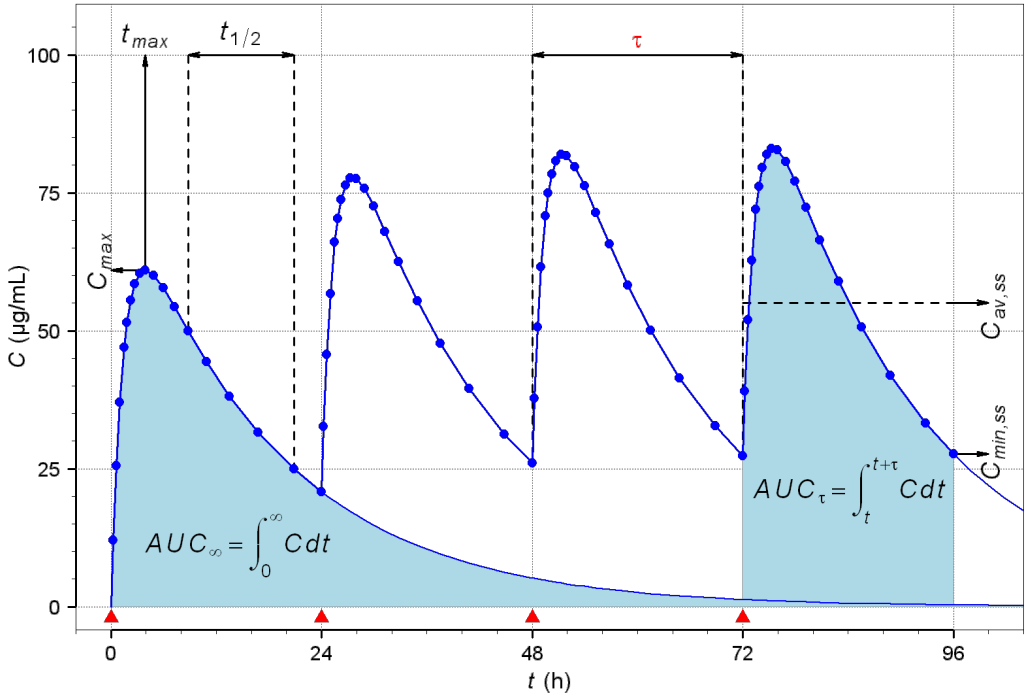
Stabilisce che una funzione che ammette un massimo od un minimo relativo o assoluto in un punto, e che sia ivi derivabile, ha necessariamente la derivata prima nulla nel punto.

Parte 4

Gli integrali

L'integrale definito

- In ambito farmaceutico, lo studio degli integrali risulta fondamentale per calcolare l'area sotto la curva (AUC) concentrazione/tempo, che descrive l'effetto di un farmaco nel tempo.
- L'AUC rappresenta infatti gli effetti dell'esposizione totale di un farmaco in un dato intervallo di tempo.



L'integrale definito

- Siano F (x) e f (x) due funzioni definite fra a e b, cioè sull'intervallo [a,b] se a ≤ b e sull'intervallo [b,a] se a > b.
- Se **F(x) è una primitiva** di f(x), cioè F' = f, definiremo l'integrale definito di f(x) da a a b in questo modo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

- I numeri a e b sono detti **estremi di integrazione**.
- La funzione f(x) dentro l'integrale è detta **funzione integranda**.
- La variabile x (dx) è detta **variabile di integrazione**.

La primitiva di una funzione

- La funzione F(x) è la primitiva della f(x), ossia una funzione la cui derivata prima è uguale alla f(x):
    - $D[F(x)+k]=f(x)$
- Ad esempio, la funzione $f(x)=2x$ ha come funzione primitiva $F(x)=x^2+k$ perché la derivata prima della $F'(x)=2x$.
- k è una costante qualsiasi che scompare con la derivata prima in quanto $D[k]=0$.

Definizione formale di integrale definito

- Se tra i due insiemi A e B esiste un elemento unico c che li separa, si dice che la funzione **f(x) è integrabile in [a,b] secondo Riemann**.

- c=supA=infB

- L'elemento c è detto **integrale definito** di f(x) in [a,b] e si indica con il simbolo seguente:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Esempio

Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ da 1 a 7:

$$\int_1^7 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^7 = \ln 7 - \ln 1 = \ln 7$$

ed è chiaro che il numero 7 si può sostituire con qualunque numero t, ottenendo così il significato geometrico del logaritmo.

Esempio

Calcoliamo l'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione y = $\frac{1}{x}$ da 1 a 7:

Il calcolo dell'area del sottografico dell'iperbole equilatera di equazione $y = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = 7$ si effettua tramite l'integrale definito di $\frac{1}{x}$ nell'intervallo specificato. L'integrale di $\frac{1}{x}$ è noto per essere $\ln|x|$, quindi l'integrale definito è:

$$\int_1^7 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_1^7$$

Calcolando questo valore tra i limiti di integrazione 1 e 7, otteniamo:

$$[\ln|x|]_1^7 = \ln|7| - \ln|1| = \ln(7) - \ln(1)$$

Poiché il logaritmo naturale di 1 è 0 (ln(1) = 0), l'espressione si semplifica in:

$$\ln(7) - 0 = \ln(7)$$

Quindi, l'area del sottografico dell'iperbole equilatera da 1 a 7 è $\ln(7)$ unità quadrate.

Teoremi sul calcolo integrale

1. **Teorema fondamentale del calcolo integrale**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. **Scambio degli estremi di integrazione**

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Teoremi sul calcolo integrale

1. **Teorema fondamentale del calcolo integrale**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2. **Scambio degli estremi di integrazione**

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Teoremi sul calcolo integrale

3. Regola di Chasles

Per ogni a, b, c ∈ D di f , in qualunque ordine,

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Metodi di integrazione numerica

- Lo scopo di questi metodi è di calcolare in modo approssimato un integrale definito di una funzione di una o piu' variabili:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad x \in [a,b]$$

- L'integrazione numerica si basa (quasi sempre) semplicemente sulla definizione di integrale definito e sull'approssimazione di una funzione in un certo intervallo con una polinomiale data.

Metodo di Bezout o dei trapezi

- Con una approssimazione al primo ordine l'integrale definito di una generica funzione f si può scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{2}(f(b)+f(a)) = I_1$$

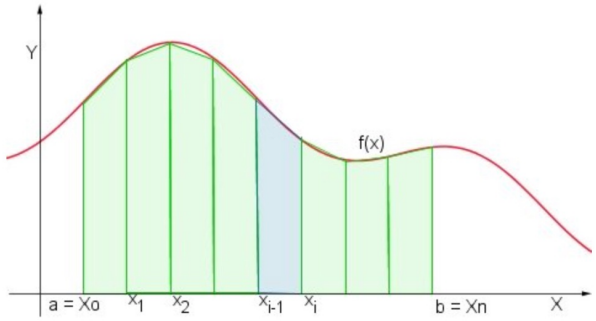
Utilizzando l'additività dell'integrale si può suddividere l'intervallo [a,b] in n intervalli di ampiezza h =(b-a)/n. Pertanto:

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(x_n)\right]$$

Metodo di Bezout o dei trapezi

In dettaglio, si suddivide l'intervallo di integrazione [a,b] in n parti uguali:

$$a=x_0<x_1<x_2\ldots<x_n=b$$



Otteniamo così n intervalli più piccolo, $[a,x_1]$, $[x_1,x_2]$, … $[x_{n-1}, b]$. L'ampiezza di ogni intervallo parziale sarà $h=\frac{b-a}{n}$. Il valore approssimativo dell'integrale definito $\int_a^b f(x)dx$ è dato dalla somma delle aree di tutti i trapezi.

Esercizio sull'integrale definito

Trovare un'approssimazione dell'integrale:

$$\int_{-1}^{1} (x\sqrt{1+x^2}+2)dx$$

Mediante la formula dei trapezi.

$I_1=\frac{h}{2}(f_0+f_1)$

$f_0=f(-1)=-\sqrt{2}+2$

$f_1=f(1)=\sqrt{2}+2$

$I_1=-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2=4$

Parte 5

Statistica

Cos'è la statistica

- **La statistica si può definire come un insieme di metodi scientifici finalizzati alla conoscenza quantitativa e qualitativa dei fenomeni collettivi mediante la raccolta, l'ordinamento, la sintesi e l'analisi dei dati**.
- In base all'oggetto dell'analisi, si distinguono due tipi di statistica:
- Statistica **DESCRITTIVA**: l'oggetto dell'analisi è la *popolazione*. La Statistica DESCRITTIVA ha come finalità la presentazione di un certo fenomeno in forma sintetica.
- Statistica **INFERENTE**: l'oggetto dell'analisi è un *campione*. La Statistica INFERENTE ha come finalità di ricavare dallo studio condotto leggi generali che si intendono estendere alla popolazione e/o ad altre situazioni simili .

Alcuni concetti chiave

- **Popolazione**: serie di dati, che rappresenta l'insieme che si vuole indagare (reali, sperimentali, matematici)
- **Campione**: serie di dati, che rappresenta una porzione della popolazione (campione rappresentativo)
- **Variabili**: caratteristica o attributo osservabile sulle unità statistiche, posso essere qualitative o quantitative (continue, discrete).
- **Modalità**: valori che la variabile può assumere
- **Osservazione**: il valore assunto dalla variabile in una data unità statistica lo chiameremo osservazione

Le fasi di un'indagine statistica

1) la formulazione del problema;
2) la rilevazione dei dati;
3) lo spoglio e la classificazione dei dati;
4) l'elaborazione;
5) la presentazione dei risultati.

La formulazione del problema statistico

1. definire l'oggetto dell'analisi: si definisce **unità statistica** il caso individuale componente del collettivo statistico.
2. definire la "popolazione" da analizzare: si definisce **popolazione o collettivo statistico** l'insieme dei casi individuali presi come riferimento per studiare il fenomeno in esame.
3. scegliere il carattere (o caratteri) da prendere in considerazione e le sue modalità. Il **carattere** è l'aspetto elementare rispetto al quale viene considerata la singola unità statistica. Le modalità sono i possibili modi di presentarsi del carattere oggetto di analisi.

Variabili

- Le variabili possono essere **qualitative** o **quantitative.**
- **Le variabili qualitative** si distinguono in **categoriche** (classificazione: genere, colore degli occhi) e **ordinali** (ordinamento: titolo di studio, gravità della patologia).
- **Le variabili quantitative** si distinguono in **discrete** (conteggio: solo valori interi) e **continue** (misurazione: valori reali infiniti)

STATISTICA DESCRITTIVA

La statistica descrittiva

- La statistica descrittiva è un ramo della statistica che riguarda la **raccolta**, l'**organizzazione**, la **sintesi** e la **presentazione dei dati**.
- Il suo scopo principale è fornire una panoramica chiara e concisa di un insieme di dati, rendendoli più facili da comprendere e interpretare.
- La statistica descrittiva svolge un ruolo fondamentale nella prima esplorazione dei dati, consentendo a ricercatori, analisti e decisori di ottenere rapidamente informazioni sugli insiemi di dati. Non comporta la formulazione di inferenze o conclusioni sulla popolazione (come fa la statistica inferenziale); **si concentra piuttosto sulla sintesi e sulla presentazione delle informazioni contenute in un insieme di dati**.

La statistica descrittiva

- **Raccolta dei dati**: La statistica descrittiva inizia con la raccolta dei dati. I dati possono essere raccolti attraverso sondaggi, esperimenti, osservazioni o estrapolati da fonti esistenti.
- **Organizzazione dei dati**: Una volta raccolti, i dati vengono organizzati in modo significativo. Per i dati numerici, ciò spesso comporta la creazione di distribuzioni di frequenza o istogrammi per mostrare come i dati sono distribuiti. Per i dati categorici, i dati possono essere organizzati in tabelle.
- **Tendenza centrale**: La statistica descrittiva include misure di tendenza centrale, come la media (valore medio), la mediana (valore centrale) e la moda (valore più frequente). Queste misure aiutano a identificare il valore tipico o centrale in un insieme di dati.
- **Variabilità e dispersione**: La statistica descrittiva include anche misure di variabilità o dispersione, come l'intervallo, la varianza e la deviazione standard. Queste misure descrivono come i dati sono distribuiti attorno al valore centrale e forniscono informazioni sulla coerenza dei dati.

La statistica descrittiva

- **Visualizzazione**: La statistica descrittiva coinvolge spesso tecniche di visualizzazione dei dati, tra cui grafici (come i grafici a barre, i grafici a dispersione e i diagrammi a scatola) che forniscono riepilogi visivi dei dati.
- **Statistiche di sintesi**: Le statistiche di sintesi, come i valori minimi e massimi, i quartili e i percentili, vengono utilizzate per descrivere i limiti dei dati e la loro distribuzione.
- **Presentazione dei dati**: Le tecniche di statistica descrittiva aiutano a presentare i dati in modo che siano facili da interpretare. Ciò può includere la creazione di tabelle e grafici per mostrare le principali conclusioni.
- **Pulizia dei dati**: Parte del processo spesso comporta l'individuazione e la correzione degli *outlier* o dei punti dati mancanti al fine di garantire la qualità dei dati.

LA STATISTICA DESCRITTIVA

Include misure, indici (numerici) che descrivono le caratteristiche della distribuzione di una o più variabili in modo sintetico.

- **indici di posizione o centralità**: valore centrale, medie algebriche, mediana, moda (detti anche misure di intensità, centri..).
- **indici di dispersione o variabilità**: intervallo di variazione, varianza, varianza stimata, deviazione standard, deviazione standard stimata .

Distribuzione di frequenza e densità di frequenza di una variabile

- si chiama **distribuzione di frequenze** di una variabile suddivisa in classi lo schema con cui si associa a ciascuna classe la rispettiva frequenza.
- si chiama **densità di frequenza** della classe il rapporto fra la frequenza della classe e la sua ampiezza. Il numero che si ottiene indica quante sono, in media, le unità statistiche per ogni unità del carattere.

Distribuzione di Frequenza

Dati raggruppati in classi o categorie: $(x_i, f_i)_{i=1,\ldots,m}$

Frequenza assoluta fi : è il numero di osservazioni che ricadono in ciascuna classe.

Il numero totale di osservazioni è $$n = \sum_{i=1}^{m} f_i$$

Frequenza relativa fi/n: è il rapporto tra la frequenza assoluta e il numero totale n di osservazioni.

Rappresenta la percentuale di osservazioni in ogni classe o categoria.

Frequenza assoluta cumulata F_i : $$F_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

Frequenza relativa cumulata F_i/n : $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{i} f_k$$

Esercizio

Esercizio 1: Vengono intervistate 50 persone, e a tutte viene posta la seguente domanda: quanti figli ci sono nella sua famiglia?

numero figli	0	1	2	3	4	5	6
f_{assoluta}	6	12	16	9	4	1	2

Calcolare: frequenze relative, frequenze cumulate.

ESERCIZIO

Soluzione:

numero figli	0	1	2	3	4	5	6
f_{assoluta}	6	12	16	9	4	1	2
f_{relativa}	0.12	0.24	0.32	0.18	0.08	0.02	0.04
F_{cumulata}	6	18	34	43	47	48	**50**

ESERCIZIO

Esercizio 2. Vengono intervistati i figli delle stesse 50 famiglie, e a tutti viene posta la seguente domanda: quanti figli siete in famiglia?

Costruire la tabella delle frequenze.

ESERCIZIO

Soluzione:

numero figli	1	2	3	4	5	6
f_{assoluta}	12	32	27	16	5	12
F_{cumulata}	12	44	71	87	92	**104**

ESEMPIO

Un'indagine sul peso, su un campione di n = 100 studenti, ha prodotto il seguente risultato. I pesi p sono espressi in Kg e sono stati raggruppati in cinque classi di peso.

classe (peso in Kg)	f_i	f_i/n
$60 \leq p \leq 62$	5	0.05
$63 \leq p \leq 65$	18	0.18
$66 \leq p \leq 68$	42	0.42
$69 \leq p \leq 71$	27	0.27
$72 \leq p \leq 74$	8	0.08
	100	1.00

Sono riportate le frequenze assolute fi (numero di individui appartenenti alla classe di peso i-sima) e le frequenze relative fi/n.

Le classi sono di uguale ampiezza, ma non sono contigue

ESEMPIO

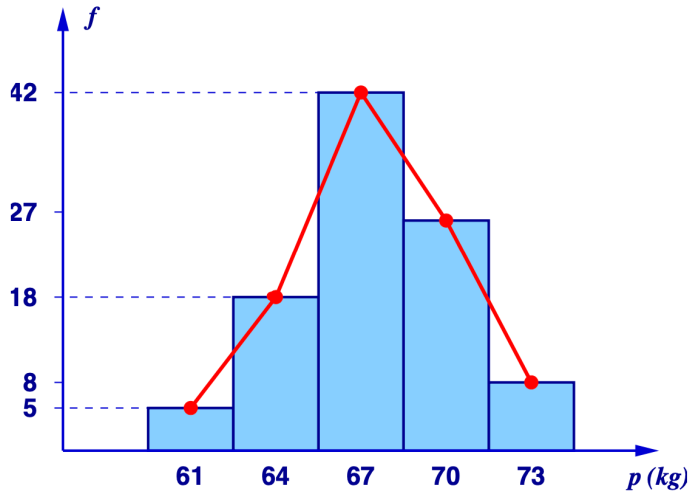
Estendiamo i confini di ciascuna classe in modo simmetrico di 0.5 Kg. La popolazione non è cambiata e possiamo rappresentare i dati, in classi contigue, come segue:

classe (peso in Kg)	r_i	f_i	f_i/n
$59.5 \leq p < 62.5$	61	5	0.05
$62.5 \leq p < 65.5$	64	18	0.18
$65.5 \leq p < 68.5$	67	42	0.42
$68.8 \leq p < 71.5$	70	27	0.27
$71.5 \leq p < 74.5$	73	8	0.08
		100	1.00

Supponendo che gli individui di una classe siano distribuiti uniformemente al suo interno, è naturale associare a ciascuna classe, come rappresentante, il valore centrale r_i della classe stessa.

POLIGONO DI FREQUENZa

Possiamo rappresentare in modo efficace le frequenze delle classi del campione mediante un istogramma (dove le aree dei rettangoli sono proporzionali alle frequenze della classe):



Unendo i punti medi dei lati superiori dei rettangoli, si ottiene il cosiddetto poligono di frequenza

Misure di frequenza

Generalmente, vengono utilizzati quattro tipi di misure di frequenza:

1. Frequenza assoluta: esistenza del fenomeno stesso, non consente di avere la misura del rischio. **Esempio**: 10 casi di epatite in una certa popolazione

2. I rapporti: esprimono la relazione tra due quantità indipendenti tra loro. **Esempio**: Rapporto tra pazienti infetti o non infetti

3. Le proporzioni: sono un rapporto in cui il numeratore è incluso nel denominatore. **Esempio**: Rapporto tra infetti e totale della popolazione (infetti e non infetti)

4. I tassi: frequenza di **nuovi eventi** che si verificano in un determinato **periodo di tempo**, diviso per la media della popolazione a rischio.

Tasso grezzo e tasso specifico

Tasso grezzo: Si riferisce agli eventi verificatisi, in un certo periodo di tempo, nell'intera popolazione

Esempio, se consideriamo l'evento morte:

$$R_{grezzo} = \frac{N^{\circ} \quad \text{dei morti}}{\text{Intera popolazione}} \quad *K$$

Tasso grezzo e tasso specifico

Tasso specifico: Si riferisce agli eventi verificatisi, in un certo periodo di tempo, in una parte della popolazione, ad esempio in una fascia di età

$$R_{specifico_età} = \frac{N^{\circ} \quad \text{dei morti } \textit{in una fascia d'età}}{\text{Popolazione } \textit{in quella fascia d'età}}$$

Incidenza cumulativa

Incidenza cumulativa: indica la proporzione di una popolazione che, in un determinato periodo di tempo, contrae una malattia.

Tale misura riflette la probabilità che un individuo contragga la malattia in un determinato periodo di tempo o per una determinata esposizione, a condizione che rimanga a rischio durante il periodo di interesse. Essa quindi si calcola con il rapporto:

Incidenza cumulativa = (n. eventi) / (popolazione a rischio all'inizio del periodo)

Tasso di incidenza

Tasso di incidenza: esprime la *frequenza di un evento nell'unità di tempo*, e si calcola rapportando i nuovi casi di malattia (gli eventi) alle persone e al tempo (tempo-persona o *person-time*). E' la misura di elezione quando la domanda riguarda la frequenza della malattia in un dato momento, teoricamente istantaneo o comunque riferito all'unità di tempo. E' la misura standard per i confronti geografici e temporali.

Tasso di Incidenza = (n. eventi) / (popolazione a rischio * tempo)

INDICI DI POSIZIONE O CENTRALITÀ

Moda

- E’ il valore (o classe) al quale è associata la frequenza più alta.
- E’ una misura di tendenza centrale che identifica il valore o i valori che si verificano più frequentemente in un insieme di dati.
- La moda rappresenta il picco o i picchi nella distribuzione dei dati ed è utile per comprendere quali valori siano più comuni in un insieme di osservazioni.
- Per calcolare la moda, è possibile creare una tabella delle frequenze che conta quante volte ogni valore si verifica nei dati. Il valore con la frequenza massima è la moda.

Caratteristiche della moda

Un campione può avere più di una moda.

La moda è molto sensibile alla grandezza e al numero degli intervalli di classe: può cambiare in maniera considerevole cambiando gli intervalli delle classi.

La moda di un campione non fornisce una buona stima della moda della popolazione da cui quel campione è stato tratto.

Valore centrale

Dato l'insieme di valori $\{x_1,x_2,...,x_n\}$, il valore centrale considera solo i due valori estremi (non tiene conto di tutti i valori):

$$\frac{x_{max} + x_{min}}{2}$$

dove $x_{max} = max\{x_1,x_2,...,x_n\}$ e $x_{min} = min\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

Esempio: {3, 20, 27, 25, 30, 310}

$$\frac{x_{max} + x_{min}}{2} = \frac{310+3}{2} = 156.5$$

Mediana

- Dato l'insieme di valori ordinati $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n$, si chiama **mediana** (o valore mediano) il valore M_e che occupa la posizione centrale:
  - Se n è dispari, c'è un solo termine mediano di posto pari a $\frac{n+1}{2}$

$$M_e = x_{\frac{n+1}{2}}$$

  - Se n è pari, ci sono due termini mediani di posto $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$

$$M_e = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

Mediana - esercizi

Esempio 1.

$\{503, 25, 0, 81, 13\} \Rightarrow \{0, 13, 25, 81, 503\} \Rightarrow Me = 25$

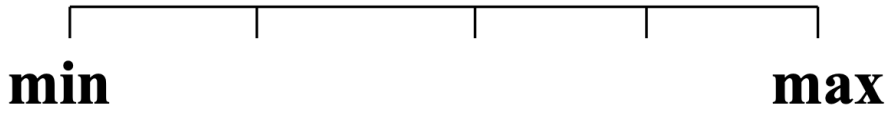
Esempio 2.

$\{327, 2, 93, 1, 503, 81\} \Rightarrow \{1, 2, 81, 93, 327, 503\} \Rightarrow \frac{81+93}{2} \Rightarrow Me = 87$

Indici di posizione: I quantili

I quantili si riferiscono ad una suddivisione in parti uguali dei dati ordinati.

Una suddivisione dei dati ordinati in 4 classi aventi uguali frequenze produce i quartili.



In pratica vengono divisi i dati ordinati in 4 gruppi di dimensione pari a un quarto del totale. I valori che separano un gruppo dall'altro sono appunto i quartili (la mediana è esattamente il secondo quartile). Il primo quartile lascia alla sua sinistra il 25% dei dati più bassi, il terzo quartile lascia alla sua destra il 25% dei dati più alti.

La distanza tra il primo e il terzo quartile è detta **distanza interquartile** ed è una misura di dispersione dei valori intorno alla mediana. Infatti tra il primo e il terzo quartile c'è il 50% dei dati (un quarto sono tra il primo quartile e la mediana, l'altro quarto tra la mediana e il terzo quartile). Più questa distanza è piccola, più i dati sono concentrati intorno alla mediana.

Boxplot e outlier

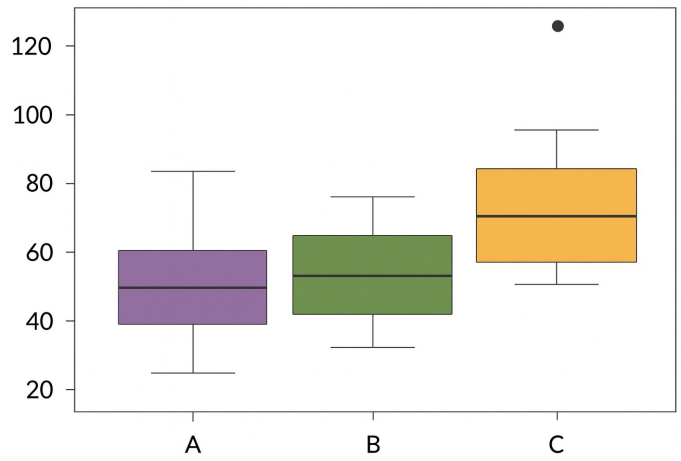
Per una variabile quantitativa, si chiama statistica a cinque punti la sequenza di numeri:

minimo, primo quartile, mediana, terzo quartile, massimo

e viene rappresentata graficamente mediante il **boxplot**, o diagramma a scatole, che si ottiene riportando i cinque valori e sottolineando la zona centrale dei dati con un rettangolo che ha come lati opposti i segmenti relativi al primo e al terzo quartile.

Si chiamano **outlier** i dati che distano dal box centrale più di una volta e mezzo della distanza interquartile, e vengono rappresentati come punti isolati.

Boxplot - esempio



È immediato verificare, dalla posizione delle mediane, che i valori del gruppo C risultano più alti rispetto ai gruppi A e B, e che, dalla maggiore altezza della scatola, presentano anche una variabilità più elevata.

Per i dati relativi al gruppo C, il terzo quartile è circa 80 e la distanza interquartile (IQR) è circa 35; di conseguenza, è considerato outlier ogni valore superiore a

80 + 1.5 \times 35 = 132.5,

e in particolare lo è il valore 130, rappresentato dal punto nero sopra il box.

Indici di posizione: I quantili

Analogamente, una suddivisione dei dati ordinati in 10 classi aventi uguali frequenze produce i decili.

Il primo quartile è l'unità di osservazione che ha la proprietà di avere sotto di sè un decimo dei dati della distribuzione.

E ancora, una suddivisione dei dati ordinati in 100 classi aventi uguali frequenze produce i centili.

Il primo quartile è l'unità di osservazione che ha la proprietà di avere sotto di sè un centesimo dei dati della distribuzione.

Calcolo dei quantili

Per calcolare i quantili si usa lo stesso procedimento usato per il calcolo della mediana.

Per calcolare il 24 percentile, per esempio, si ordinano i dati in senso crescente, e si determina se esiste un valore che abbia sotto di sè il 24% dei dati della distribuzione.

Media aritmetica

- **Media semplice**: dato l'insieme di valori $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{x_1+x_2+\cdots+xn}{n}$$

- **Media ponderata** (dati raggruppati): dato l'insieme di valori $\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$ con le rispettive frequenze assolute $\{f_1,f_2,\ldots,f_m\}$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} f_i x_i = \frac{f_1 x_1+f_2 x_2+\cdots+f_n x_n}{n}$$

Media aritmetica - esercizi

Esercizio 1.

Dato l'insieme di valori {12,25,37,41,0,53}, calcolare la media aritmetica. [media aritmetica = 28]

Esercizio 2.

Dato l'insieme di valori {28, 28, 28, 28, 28, 28}, calcolare la media aritmetica.

Esercizio 3. (dati raggruppati)

In un campione di 200 persone si sa che 20 pesano 50kg, 30 pesano 55kg, 50 pesano 60kg, 70 pesano 65kg, 20 pesano 75Kg e 10 pesano 80kg. Calcolare il peso medio [peso medio = 62.5Kg].

Differenza tra media e mediana

La media risente dei cambiamenti effettuati agli estremi di una distribuzione, mentre la mediana è insensibile a questi cambiamenti.

La media è più stabile della mediana, ovvero varia di meno al passare da un campione ad un altro.

Calcolo della media

Occorre formulare un'ipotesi su come i dati si distribuiscono all'interno di ogni classe. In assenza di ulteriori informazioni, è ragionevole congetturare che gli elementi appartenenti ad una classe si distribuiscano uniformemente al suo interno.

E` naturale associare ad ogni classe un rappresentante: il valore centrale della classe.

r_i	61	64	67	70	73
f_i	5	18	42	27	8

Ai fini del calcolo della media si utilizzano solo i rappresentanti r_i

$$\overline{p} = \frac{5 \cdot 61 + 18 \cdot 64 + 42 \cdot 67 + 27 \cdot 70 + 8 \cdot 73}{100} = 67.45\,\text{Kg}$$

INDICI DI DISPERSIONE O VARIABILITÀ

Indici di dispersione

Le misure di dispersione esprimono la tendenza delle singole osservazioni di una distribuzione di allontanarsi dalla tendenza centrale, ovvero la "variabilità" dei dati.

La dispersione esprime la "bontà" o la "povertà" della tendenza centrale quale descrittore di una distribuzione.

Si cercano indici di dispersione in modo che:

- utilizzino tutti i dati $\{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$
- siano basati sulla nozione di scarto (distanza) dei dati

Siano calcolati rispetto a un centro $d_i = |x_i - C|$
ad esempio, rispetto alla media aritmetica $d_i = |x_i - \bar{x}|$

rispetto a un dato $d_i = |x_i - x_j|$

Indici di dispersione

Alcune proprietà generali:

- l'indice di dispersione non deve mai essere negativo
- assume il valore 0 se i dati sono tutti uguali
- non cambia se si aggiunge una costante ai dati

Indici di dispersione: la varianza

Sia X una variabile statistica che assume valori $X_1, X_2, \ldots, X_M$, di media $\overline{X}$.
La **varianza**, che si indica con σ_X^2, è il numero

$$\sigma_X^2 := \overline{\Delta X^2} = \overline{(X - \overline{X})^2} = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + \ldots, +(X_M - \overline{X})^2}{M} \qquad (9.1)$$

cioè è la media dei quadrati delle distanze dei dati dalla media, e ne misura la dispersione intorno alla media.
Se la variabile assume n valori distinti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con frequenze $F_1, F_2, \ldots, F_n$ si ha, equivalentemente,

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \overline{X})^2 \qquad (9.2)$$

La radice quadrata della varianza $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$ è la **deviazione standard**.

Varianza – esempio

Una pila AAA nuova dovrebbe avere una carica complessiva di 1.25 A h (1 A h è la carica necessaria per poter fornire la corrente di 1 A per 1 h). La seguente tabella mostra i dati di carica di 50 pile nuove di due aziende diverse.

Carica (A h)	1.15	1.20	1.25	1.30
Azienda 1	1	16	25	8
Azienda 2	17	0	9	24

La carica media è 1.24 A h per i dati di entrambe le aziende, di poco più basso del valore standard. Se vogliamo capire quale azienda produce pile migliori, possiamo valutare l'affidabilità dei loro prodotti, misurando quanto si discosta la carica di una pila dal valore della carica media. Calcoliamo le deviazioni standard σ_1 e σ_2 per i dati delle due aziende.

Varianza – esempio

$$\sigma_1^2 = \frac{(1.15-1.24)^2 + 16(1.20-1.24)^2 + 25(1.25-1.24)^2 + 8(1.30-1.24)^2}{50}$$
$$= \frac{0.065}{50} = 0.0013$$
$$\sigma_2^2 = \frac{17(1.15-1.24)^2 + 0(1.20-1.24)^2 + 9(1.25-1.24)^2 + 24(1.30-1.24)^2}{49}$$
$$= \frac{0.225}{50} = 0.0045$$

Estraendo la radice quadrata si ottengono i valori delle deviazioni standard: $\sigma_1 \approx 0.036$, $\sigma_2 \approx 0.067$. Si noti che questi valori hanno le unità di misura dei dati, cioè sono cariche complessive espresse in A h. Confrontando questi due valori, si realizza che il secondo è quasi il doppio del primo. Ne deduciamo che i dati di carica delle pile della azienda 1 sono, in media, più vicini al valore medio rispetto a quelli dell'azienda 2. Concludiamo così che i prodotti della prima azienda sono più affidabili, presentano infatti meno variabilità.

Coefficiente di variazione

Il coefficiente di variazione è definito come il rapporto tra la deviazione standard e la media:

$$V = \frac{S}{\overline{X}}$$

L'indice di varianza relativa è uguale al quadrato del coefficiente di variazione:

$$V_{rel}^2 = \frac{S^2}{\overline{X}^2}$$

Statistiche campionarie

Spesso gli indici statistici vengono applicati non all'intera popolazione, ma ad un suo campione. Si cerca di stimare (inferenza) nel miglior modo possibile le caratteristiche dell'intera popolazione a partire dalle informazioni desunte da un campione rappresentativo.

In questo caso si utilizzano le seguenti formule modificate:

Varianza campionaria (*stimata*):

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Deviazione standard campionaria (*stimata*):

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Covarianza

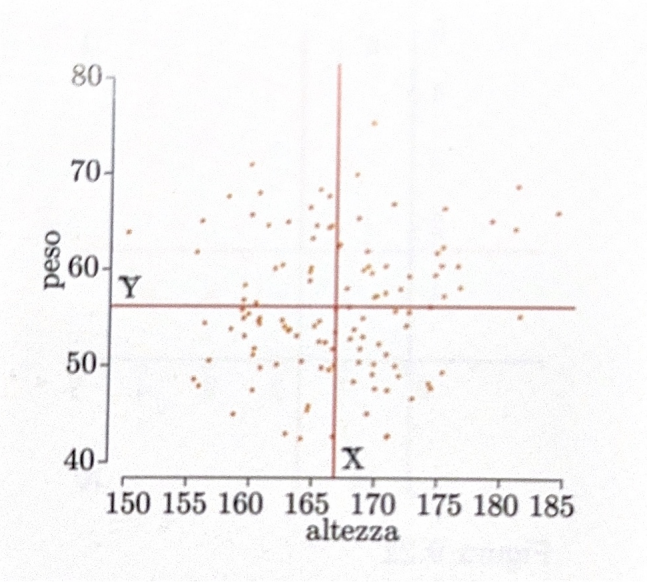
Fin qui abbiamo discusso casi in cui si misura una sola variabile relativa ai dati, ma, in genere, in statistica si analizzano contemporaneamente più variabili, e può essere importante capire se siano "**correlate**", cioè legate tra loro.

Supponiamo di prendere i dati relativi alla coppia di variabili X, Y: alla misura X_1 della variabile X corrisponde la misura Y_1 della variabile Y; a X_2 corrisponde Y_2 e così via. Indicheremo con $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ le medie delle due variabili, e con σ_X^2 e σ_Y^2 le rispettive varianze. Possiamo chiederci se, all'aumentare dei valori di una variabile, quelli dell'altra corrispondentemente aumentino o diminuiscano. In altre parole, vorremmo sapere se i dati X e Y variano congiuntamente, cioè se siano o meno covarianti. Per stimare quantitativamente se esista una relazione fra i dati delle due distribuzioni si utilizza un indice detto, appunto, covarianza.

Covarianza

Data una popolazione di dimensione M e due variabili statistiche $X = X_1, \ldots, X_N$ e $Y = Y_1, \ldots, Y_N$, il grafico dei punti (X_i, Y_i) prende il nome di **grafico di dispersione**.
Indicati con $\Delta X_i = X_i - \overline{X}$ e $\Delta Y_i = Y_i - \overline{Y}$ gli scarti dalla media delle due variabili, si definisce **covarianza** il numero

$$\sigma_{XY} := \overline{\Delta X \Delta Y} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \Delta X_i \Delta Y_i$$



Covarianza e coefficiente di correlazione

Il **coefficiente di correlazione** è il numero

$$\rho := \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Si può dimostrare che

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

La massima correlazione positiva si ha per $\rho = 1$, la massima correlazione negativa si ha per $\rho = -1$, mentre non vi è correlazione se $\rho = 0$, e in tal caso X e Y sono dette **statisticamente indipendenti.**

La **massima correlazione** positiva, $\rho = 1$, si ha se le due variabili sono in relazione lineare crescente, cioè se $Y_i = aX_i + b$, con $a > 0$.
La massima correlazione negativa, $\rho = -1$, si ha se $Y_i = aX_i + b$, con $a < 0$.

Tabella riassuntiva

$\bar{x}$	media	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \, x_i$
s^2	varianza	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
s	dev. standard	$\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$
s^2	campionaria	$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$	$\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
s	campionaria	$\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$	$\sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{m} f_i \cdot (x_i - \bar{x})^2}$